UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITÄT
BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITY

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro

LUCRARE DE LICENŢĂ

Coordonator ştiinţific
Dr. Lázár Zsolt József

Absolvent
Szőllősi Tamás-Géza

2025

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITÄT
BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITY

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro

UNIVERSITATEA "BABEŞ-BOLYAI", CLUJ NAPOCA
FACULTATEA DE FIZICA
SPECIALIZAREA FIZICA-INFORMATICA

LUCRARE DE LICENŢĂ

PRINCIPIUL VARIAȚIONAL HERGLOTZ ÎN TEORIILE GRAVITAȚIONALE DISIPATIVE

Coordonator ştiinţific
Dr. Lázár Zsolt József

Absolvent
Szőllősi Tamás-Géza

2025

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITÄT
BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITY

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
FIZIKA KAR
FIZIKA-INFORMATIKA SZAK

ÁLLAMVIZSGA DOLGOZAT

HERGLOTZ VARIÁCIÓS ELV DISSZIPATÍV GRAVITÁCIÓS ELMÉLETEKBEN

Témavezető tanár
Dr. Lázár Zsolt József

Hallgató
Szőllősi Tamás-Géza

2025

Kivonat

Anyag-geometria csatolás jelenlétében egyes módosított gravitációs elméletekben az energia-momentum tenzor nem kovariánsan megmaradó mennyiség [1], ami a rendszer disszipatív jellegéhez vezet, és így nyílt rendszerek termodinamikája révén értelmezhető [2]. Jelen munkában egy új megközelítést javasolunk a Herglotz-féle variációs elv alkalmazásával. Ez az elv a klasszikus variációs elv természetes általánosítása disszipatív rendszerek esetére, amely egyszerű és koherens keretet biztosít az ilyen típusú rendszerek leírására. Korábbi munkákban [3][4] ezt az elvet már alkalmazták gravitációs elméletekre, gyakran mesterségesen bevezetve a disszipációt olyan elméletbe, amely nem disszipatív. Ezzel szemben mi olyan elméletekre alkalmazzuk a Herglotz-féle formalizmust, ahol az energia-momentum tenzor nem megmaradó eleve. Ennek következtében a téridő egyenletekben új disszipatív tagok jelennek meg, amelyek megfelelő dinamikai feltételezésekkel lehetőséget nyújtanak arra, hogy az energia-momentum tenzor kovariánsan megmaradó mennyiséggé váljon. A korrespondencia elvével összhangban téregyenleteink speciális esetekben visszaadják az irodalomban ismert eredményeket.

Abstract

In certain modified theories of gravity where there is a nonminimal coupling between matter and geometry, the energy-momentum tensor is not a covariantly conserved quantity [1], which leads to the dissipative nature of the system and can be interpreted in terms of the thermodynamics of open systems [2]. In this work, we propose a new approach based on the application of the Herglotz variational principle. This principle represents a natural generalization of the classical variational principle to dissipative systems, providing a simple and coherent framework for describing such types of systems. In previous works [3][4], this principle has already been applied to gravitational theories, but with dissipation introduced artificially into a theory that was originally non-dissipative. In contrast, we apply the Herglotz formalism to theories in which the energy-momentum tensor is not conserved. As a result, new dissipative terms appear in the field equations, which, under suitable dynamical assumptions, allow the energy-momentum tensor to become a covariantly conserved quantity. In accordance with the correspondence principle, our field equations reduce, in special cases, to results already known in the literature.

Tartalomjegyzék

Bevezető

Az általános relativitáselmélet születése alapvető mérföldkőnek tekinthető a tudománytörténelemben [5],[6],[7]. Nemcsak számos jelenség leírására bizonyult alkalmasnak, de meghatározó módon járult hozzá modern világszemléletünkhöz is [8],[9]. Az utóbbi évtizedek kísérleti eredményei feltárták azonban, hogy az Einstein-féle relativitáselméletnek megvannak a maga korlátai és csupán közelítésként szolgálhat egy mélyebb, átfogóbb gravitációs elmélethez. Bár számos kérdés esetén nagy pontosságú előrejelzésekre képes, ezek az Univerzum skáláján lokálisnak tekinthető, Naprendszer léptékű dinamika szintjére korlátozódnak. A jelenleg standardnak számító ΛCDM kozmológiai modell ugyan illeszkedik az adatokhoz, azonban több komoly kérdést is felvet. A modell szerint az Univerzum energia-sűrűségének 70%-át sötét energia alkotja, amelyet a kozmológiai állandóval (Λ) írunk le. Ez azonban két jelentős problémát eredményet. Egyrészt a kvantumtérelméleti vákuumenergia és a megfigyelt Λ értéke között nagyságrendi eltérés van, másrészt egy olyan Univerzumban, amelynek skálafaktora a, a szokásos (barionos) anyag sűrűsége (ρ_m) az $\rho_m \sim a^{-3}$ összefüggés szerint csökken, miközben a kozmológiai állandóhoz kapcsolódó energiasűrűség (ρ_Λ) változatlan marad. Ez hosszú távon egyre dominánsabbá teszi a sötét energiát, amire a jelenlegi modell nem ad magyarázatot.

Ennek fényében, az utóbbi évtizedekben egyre nagyobb figyelem irányult a módosított gravitációs elméletek felé, melyeknak számos ága alakult ki idővel. Ezen elméletek egyik jelentős irányvonala a hatás explicit általánosításán alapul, ahol a Ricci skalárt (R) egy analitikus függvénnyel helyettesítik (pl. $f(R), f(R,T), f(R,L_m), f(R,T,R_{\mu\nu}T^{\mu\nu})$). Egy másik irány viszont a geometria mélyebb szintű újraformálásán alapul, ahol nem a Levi-Civita kovariáns deriváltat tekintik alapértelmezettnek, hanem alternatív kovariáns deriváltakat vezetnek be, melyekben megjelenhet a torzió, non-metricitás. Jelen dolgozatban a standard Levi-Civita kovariáns deriválttal fogunk dolgozni, ahol a metrika konnexió kompatibilis (avagy a metrikus tenzor egy kovariánsan megmaradó mennyiség, $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$) és a Christoffel-szimbólum alsó indexei szimmetrikusak. Ezen módosított gravitációs elméletek lehetővé teszik az anyag és a geometria közötti nemminimális csatolás kialakulását, melynek következménye, hogy az energia-momentum tenzor már nem lesz megmaradó mennyiség ($\nabla^\mu T_{\mu\nu} \neq 0$).

Korábbi munkák rámutattak arra, hogy a nyílt rendszerek termodinamikája által az energia-momentum tenzor nemmegmaradása értelmezhető úgy, mint egy irreverzibilis energiaáramlás a gravitációs szektorból az anyag szektor felé, mely általánosságban részecskék keletkezéséhez vezethet. Ezen elméletek kutatása Prigogine és társai munkájával indult el a 20. század végén, akik irreverzibilis anyagteremtés tanulmányozásával foglalkoztak a kozmológiában. Későbbiekben ezt a keretrendszert kovariáns formában általánosították, különösen az entrópia és részecske-négyesáram vektorok bevezetésével. Az utóbbi években a nyílt rendszerek irreverzibilis termodinamikáját fokozott érdeklődés övezi a széleskörű alkalmazhatóságából kifolyólag. Fontos kihangsúlyozni azonban, hogy ezen tanulmányokban nincs specifikálva milyen részecskék is keletkeznek valójában, hiszen ezek természetének meghatározásához kvantumtérelmélet szükséges. Ez azonban további bonyodalmakat vet fel, révén, hogy a gravitációelmélet klasszikus kereten belül mozog és jelenleg nem áll rendelkezésünkre egyetlen kísérletileg igazolható kvantumgravitációs elmélet sem.

Az előző, inkább konceptuális természetű probléma mellett komoly nehézségek jelentkeznek a kísérleti adatok szintjén is. Számos nemkonzervatív gravitációs elmélet esetében kimutatták, hogy a megfigyelések szigorú felső korlátokat állítanak a nemkonzervativitás mértékére. Pontosabban, még abban az esetben is, ha az energia-momentum tenzor nem megmaradó mennyiség, a nem-megmaradás mértéke rendkívül kicsi, gyakorlatilag elhanyagolható. Ezen két problémát szándékozik áthidalni a Herglotz variációs elv, mely egy kiterjesztése a klasszikus variációs elvnek. A klasszikus variációs elv a modern elméleti fizika egyik alappillérének tekinthető, azonban olyan szempontból hiányosságokat mutat, hogy nem áll rendelkezésre általános variációs formalizmus a disszipatív rendszerek kezelésére. Egy érdekes alternatíva a Herglotz variációs elv, mely disszipatív dinamika leírására alkalmas. Azon tekintetben jelent radikális újítást, hogy a hatást dinamikus mennyiséggé emeli, így a Lagrange függvény közvetlenül függhet magától a hatástól. Korábbi munkák sikeresen kiterjesztették a Herglotz elvet térelméletekre is, lehetővé téve például az elektromágneses mezők disszipatív közegekben való leírását.

A Herglotz variációs elvet korábban már alkalmazták gravitációs elméletekben, azonban ezekben a munkákban a motiváció gyakran nem volt világosan megfogalmazva, vagy pusztán formai általánosításra szorítkoztak. Egy konkrét példa az Einstein-féle $f(R) = R$ elmélet vizsgálata, ahol az energia-momentum tenzor eredetileg megmaradó mennyiség. A [3] dolgozatban bevezettek egy disszipációt a Herglotz elv alkalmazásával, így nemkonzervatívvá téve a rendszert. Későbbi elemzések azonban kimutatták, hogy ez a modell csak akkor alkalmas a kísérleti adatok leírására, ha a Herglotz mezőre olyan dinamikát posztulálnak, amely az energia-momentum tenzort megmaradóvá teszi [10]. Jelen dolgozat célja, hogy fizikai motivációval lássa el a Herglotz elv alkalmázását: bemutatjuk, hogy ez a formalizmus segítségével nemcsak a $\nabla^\mu T_{\mu\nu} \neq 0$ típusú problémák oldhatók meg, hanem elkerülhető mindenféle részecskealapú interpretáció is, így megszabadulunk a kvantumtérelméleti bonyodalmaktól. A Herglotz mező lehetséges alternatív magyarázatokat adhat a sötét- energia és anyag leírására is.

A továbbiakban a dolgozat felépítését vázoljuk. Az 1. fejezetben röviden bemutatjuk az Einstein-féle általános relativitáselmélet geometriai alapjait, illetve ennek alkalmazásait. Részletes hangsúlyt fektetünk arra, hogy a gravitáció ezen az elméleten belül nem egy erő, mint a klasszikus mechanikában, hanem a téridő görbületeként értelmezhető. A 2. fejezetben egy rövid áttekintést mutatunk be az Einstein-féle gravitációselmélet nagy skálán lévő módosításaihoz. Ezek ahhoz szükségesek, hogy a megfigyelési adatokat helyesen írjuk le, a sötétenergia és sötét anyag bevezetése nélkül. Kiderül azonban, hogy ezen módosítások problematikusak több szempontból is. A legnagyobb probléma az, hogy az energia-momentum tenzor nem egy kovariánsan megmaradó mennyiség, mint az Einstein-féle relativitáselméletben. Ez nem csak egy filozófiai probléma, mivel az energia-momentum tenzor nemkonzervativitására vannak szigorú korlátok megfigyelési adatokból, úgy $f(R,T)$ elméletekben [11], mint általánosabb elméletekben is [12], amelyek tartalmaznak nemkonzervativitást. Specifikusan az $f(R,T)$ elmélet esetében, olyan modellekben, amelyek $f(R,T) = f_1(R) + f_2(T)$ alakúak valamilyen f_1, f_2-re, megfigyelési adatok alapján kizár. Feltételezve, hogy a nonkonzervativitás mértéke kicsi és belefér a megfigyelési korlátokba, felmerül a kérdés, hogy az energiával mi történik, ha nem marad meg, hova disszipálódik, vagy mire használódik fel. Prigogine munkájára alapozva, Harkó és kollaborátorai kimutatták [2], hogy a nemkonzervativitás értelmezhető a nyílt rendszerek termodinamikája által, részecskék produkciójaként vagy annihilációjaként. Annak ellenére, hogy ezen részecskék állapotegyenlete $p = w\rho$ ismert, a természetük nem az a klasszikus elméleten belül, nem lehet tudni eredetüket. Az eredetük magyarázásához bonyolult kvantumtérelméleti módszerek szükségesek, amelyektől ebben a dolgozatban eltekintünk. Ezen problémák orvoslása végett, a 3. fejezetben felvezetjük a Herglotz variációs elet, amely a klasszikus variációs elv kiterjesztése. Ez a természetes variációs elv, amely disszipatív rendszerekre (olyan rendszerekre, ahol az energia-momentum tenzor nem kovariánsan megmaradó mennyiség) alkalmazható. Ilyen értelemben, természetessé válik, hogy az $f(R,T)$ és $f(R,\mathcal{L}_M)$ elméletekre alkalmazzuk. Az egyedüli hátránya a módszernek az, hogy szükséges bevezetni egy új mezőt, a Herglotz mezőt, amelynek dinamikai mozgásegyenleteket nem lehet levezetni a variációs elv által. Ez nyit lehetőséget arra, hogy a dinamikáját úgy válasszuk meg, hogy az energia-momentum tenzor megmaradó mennyiséggé váljon: ezáltal nincs szükség részecskék keletkezésére vagy annihilációjára, s továbbá kvantumtérelméletre sem. Egyszerű módon, kvantum effektusok bevezetése nélkül, ezen problémák orvosolhatóak. Végül, a 4. fejezetben a dolgozatot zárjuk kitekintéssel, és további kutatási lehetőségekkel. A technikai és számítási részletek megtalálhatóak a függelékekben.

1. Az általános relativitáselmélet alapjai

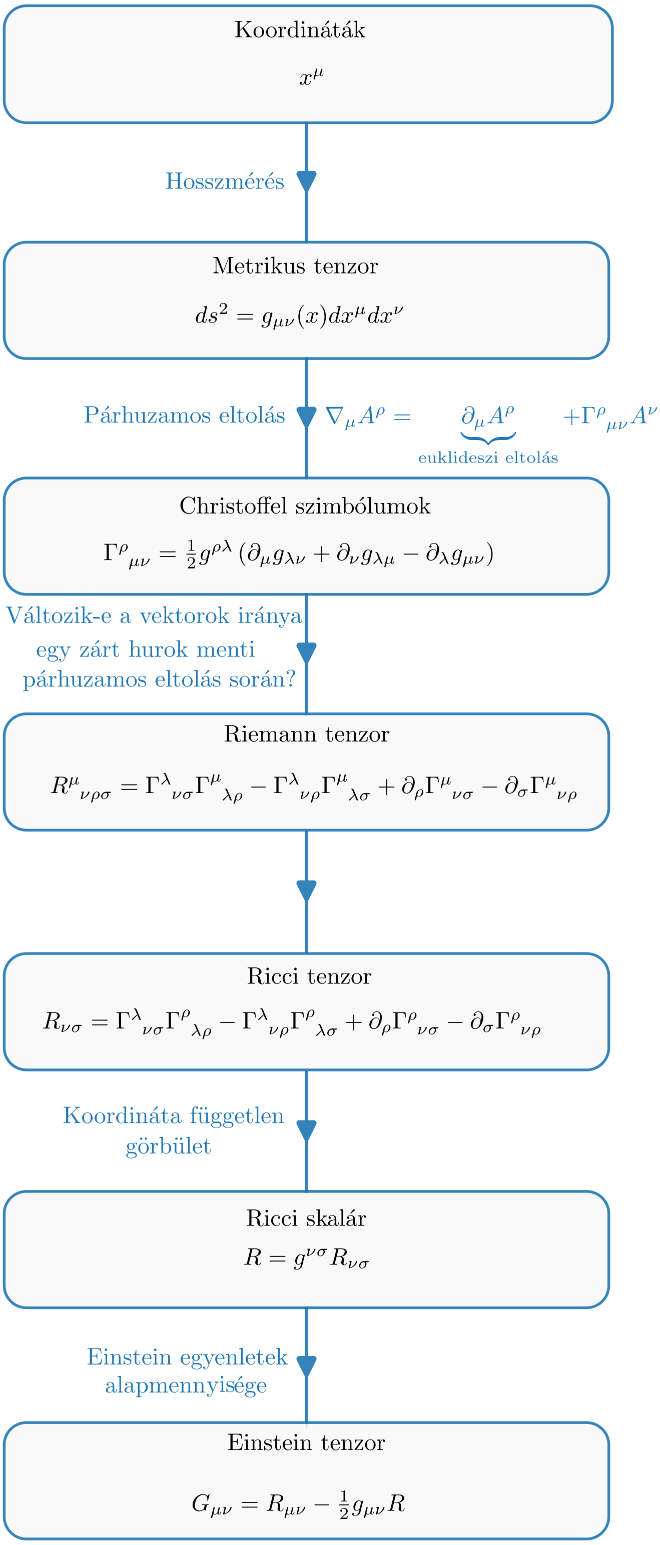
A gravitációs mező leírására az általános relativitáselmélet keretein belül egy differenciálegyenlet-rendszert alkalmazunk, az ún. Einstein-féle téregyenleteket. Az egyenlet két oldalán két különböző bemenet van: a bal oldal tiszta geometriai, a metrikus tenzor és annak deriváltjai által leírt mennyiségekből áll, míg a jobb oldalon az anyag energia-momentum tenzor szerepel. Mivel (pszeudo-) Riemann geometriában vannak felírva, az összes geometriai mennyiség kiszámítható csupán a metrikus tenzor és annak deriváltjai segítségével. Ezáltal, amennyiben hosszakat tudunk mérni, minden geometriai mennyiség (párhuzamos eltolás, görbület, szögek) egyértelműen származtatható. Ebben a fejezetben célunk az Einstein egyenleteket levezetni, illetve ezen egyenletek geometriai hozzávalóit bevezetni.

A speciális relativitáselmélettel szemben, ahol a Minkowski metrikát használjuk, amely egy sík (görbületmentes) pszeudo-Euklideszi geometria [1], az általános relativitáselmélet egyes alkalmazásaihoz, mint például a kompakt csillagok, általánosabb metrikákra van szükségünk. Ezen metrikákhoz rendelt görbületi tenzor nem nulla.

Az általános relativitáselmélet alapfeltevése, hogy a gravitációs mező minden tulajdonsága leírható a metrikus tenzor $g_{\mu\nu}$ komponensei és ennek deriváltjai által (lásd 1.1 ábra). Ezen az ábrán látható hogyan építhetők fel a görbülettenzorok, illetve a skalár görbület a metrikus tenzor segítségével. A metrikus tenzor egy másodrendű szimmetrikus tenzor, amely a téridőben távolságok és időkülönbségek meghatározását teszi lehetővé. Általánosan a $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ alakban van definiálva, ahol ds^2 az ívhossz négyzet. A klasszikus Euklideszi térben a metrikus tenzor az egységmátrixnak felel meg $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. A metrikus tenzor komponensek függetlenek ugyan, de tetszőleges koordináta-transzformációnak alávethetők. Ennek következtében megköveteljük, hogy az általános koordináta-transzformációk ne változtassák meg a fizikai jelenségek lényegét és dinamikai tulajdonságait. Ezen fontos fizikai elvet matematikailag a kovariancia elveként fogalmazhatjuk meg, amely megköveteli azt, hogy a fizikai törvények függetlenek legyenek a választott vonatkoztatási renszertől. A lényeges különbség a speciális relativitáselmélettel szemben az, hogy ezt az elvet már nem csak inerciarendszerekre kötjük ki, hanem minden vonatkoztatási rendszerre. A kovariancia elve automatikusan teljesül, ha a jelenségeket leíró egyenletek tenzoregyenletek formájában írhatók fel. Ennek fényében megköveteljük azt, hogy a gravitációs mezőt leíró téregyenletek tenzorális alakban legyenek megfogalmazva.

Mint minden fizikai elméletre, amely általánosít egy eddig ismert elméletet, megköveteljük,

[1] A pszeudo-Euklideszi geometria: részben hasonló az Euklideszi geometriához, a háromdimenziós Euklideszi tér még egy dimenzióval, az idődimenzióval van kiterjesztve.



1.1. ábra. Az Einstein-féle általános relativitáselmélet geometriai elemeinek ábrázolása. A metrikus tenzor a hosszmérés eszköze, amely az ismert $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ formulát általánosítja a $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ alakra. A párhuzamos eltoláshoz Riemanni geometriában további struktúrára, a kovariáns deriváltra van szükség, amely az euklideszi eltoláshoz képest korrekciókat tartalmaz a Christoffel-szimbólumok formájában. Ezek megadják, hogyan változik egy vektor iránya vagy hossza eltolás közben. Zárt hurok menti párhuzamos eltolás során a vektor irányváltozását a Riemann-tenzor írja le, ahogyan például egy gömb felületén is tapasztalható. A Riemann-tenzor kontrakciójával egyszerűen meghatározhatók a Ricci-tenzor és a Ricci-skalár.

hogy speciális esetben adja vissza úgy a speciális relativitáselméletet, mint a newtoni dinamikát. A newtoni mechanikában a gravitáció egy konzervatív erőként van értelmezve, a gravitációs potenciálból ϕ származtatható, amely a Poisson egyenlet szerint alakul: $\Delta\phi = 4\pi G\rho$. A Poisson-egyenlet egy másodrendű parciális differenciálegyenlet, emiatt az új gravitációs téregyenleteink is hasonló szerkezetet kell kövessenek.

Az energiamegmaradás egy alapvető természeti törvény. Az energia és az impulzus a speciális relativitáselmélet szerint egy négyesvektorba (egyetlen részecske esetén), bonyolultabb rendszerek esetén egy másodrendű tenzorba gyűjthető, melyet az energia-momentum tenzornak nevezünk és $T_{\mu\nu}$-vel jelöljük. A megmaradási törvényt tenzoriális formában a $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ alakban írjuk fel. Fontos azonban megjegyezni, hogy itt nem olyan megmaradásról beszélünk, mint a speciális relativitáselméleten belül, hanem *kovariáns megmaradásról*. A gravitációs mező energiájának megmaradása egy nagyon nehéz kérdés, még a jelenben is kutatott probléma. A gravitációs mező energiájának definiálása már eleve technikai probléma [13, 14]. Ettől függetlenül, az energia-momentum tenzor kovariáns megmaradási törvénynek levezethetőnek kell lennie a téregyenletekből.

A gravitációs téregyenletek levezetésére a Hilbert által bevezetett elegáns matematikai módszert alkalmazzuk, a variációs elvet, amelyet 1915-ben vezetett be és dolgozott ki teljes egészében. Az Einstein-Hilbert variációs elv[2] szokás szerint egy hatásfüggvénnyel, S-sel indul, amelyről feltételezzük, hogy a négydimenziós téridőben elhelyezkedő adott fizikai rendszer minden tulajdonságát leírja. A gravitáció esetében a hatás két fő komponensre bontható: az első a gravitációs mező, amelyet a téridőt jellemző mennyiségek, általában a görbületi tenzorok írnak le. Ezt a gravitációs hatást S_g-vel jelöljük. A második komponens, S_m, az anyag leírását biztosítja, amely a gravitációs mező forrása. Kompakt jelölésmódban:

$$S = S_g + S_m. \tag{1.1}$$

Ezen hatások konkrét alakját posztuláljuk. Az Einsten-féle gravitációs mező hatásfüggvénye a legegyszerűbb hatásfüggvény, amely a koordináta-független görbületet leíró mennyiségből (Ricci skalár, lásd 1.1 ábra) felépíthető, és a következő alakot ölti

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}d^4x, \tag{1.2}$$

ahol c a fénysebesség vákuumban, G a Newtoni-gravitációs állandó, g a metrikus tenzor determinánsa, R pedig a Ricci skalár.

Az anyag hatásfüggvénye pedig

$$S_m = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}_m\sqrt{-g}d^4x, \tag{1.3}$$

[2]Érdekes azonban megjegyezni, hogy Einstein volt történelmileg az első, aki az egyenleteket helyes formában felírta, de nem tudta őket motiválni matematikailag, vagyis nem tudta variációelméleti alapokra fektetni. Ezt Hilberttel együtt dolgozták ki, ezért Einstein-Hilbert variációs elvként ismert.

ahol $\mathcal{L}_m$ az anyagot jellemző Lagrange-sűrűség, mely számos alakot ölthet, mint például:

1. Elektromágneses mező esetén
$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{1.4}$$
ahol $F_{\mu\nu}$ a Faraday tenzor.

2. Skalár mező esetén
$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi), \tag{1.5}$$
ahol $V(\phi)$ a potenciál, illetve az első tag a Newtoni mechanika kinetikus tagjának analogonja.

Ezáltal a rendszert leíró hatás

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}d^4x + \frac{1}{c}\int \mathcal{L}_m\sqrt{-g}d^4x. \tag{1.6}$$

Előbbiekben említésre került, hogy a gravitációs mező minden tulajdonsága a metrikus tenzor $g_{\mu\nu}$ komponensei és ennek deriváltjai írják le. Ezáltal a hatást a metrikus tenzor komponensei szerint fogjuk variálni. A stacionárius hatás értelmében

$$\delta S = \delta(S_g + S_m) = \delta S_g + \delta S_m \stackrel{!}{=} 0, \tag{1.7}$$

amely a következő alfejezetek fő témája. Ennek a levezetésnek a fő üzenete és eredménye, az Einstein-féle téregyenletek kompakt alakja:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{1.8}$$

A fenti egyenlet forradalmi módon teremtett kapcsolatot az anyag (jobb oldal) és a téridő geometriája (bal oldal) között.

1.1. A gravitációs hatás variálása

A gravitációs téregyenletek geometriai részének leveztése érdekében variáljuk a gravitációs hatást

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G}\delta\left(\int R\sqrt{-g}d^4x\right) = -\frac{c^3}{16\pi G}\delta\left(\int g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x\right), \tag{1.9}$$

ahol $R_{\mu\nu}$ a Ricci-tenzor[3], $g^{\mu\nu}$ a metrikus tenzor inverze[4]. Mivel az integrálás és variáció kommutál,

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G}\int \left[R_{\mu\nu}\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) + R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g})g^{\mu\nu} + \delta(R_{\mu\nu})\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right] d^4x. \tag{1.10}$$

A metrikus tenzor determinánsának a variációja egyszerűen meghatározható néhány rövid lépésben

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}(-g)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{1.11}$$

ahol felhasználtuk a következő összefüggést (levezetése megtalálható az A.1 függelékben)

$$dg = -g \cdot g_{\mu\nu} \cdot dg^{\mu\nu}. \tag{1.12}$$

Behelyettesítve a (1.11) kifejezésben kapott eredményünket, a (1.10) gravitációs hatás variációjába

$$\begin{aligned}\delta S_g &= -\frac{c^3}{16\pi G}\int \left[R_{\mu\nu}\sqrt{-g} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu}d^4x - \frac{c^3}{16\pi G}\int \delta(R_{\mu\nu})\sqrt{-g}g^{\mu\nu}d^4x \\ &= -\frac{c^3}{16\pi G}\int \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x - \frac{c^3}{16\pi G}\int \delta(R_{\mu\nu})\sqrt{-g}g^{\mu\nu}d^4x. \end{aligned} \tag{1.13}$$

A második kifejezésben a (1.13) egyenletben, a Ricci-tenzor variációjára az ún. Palatini-azonosságot használjuk (levezetéséhez lásd A.2 függeléket)

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho\left(\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}\right), \tag{1.14}$$

ahol $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ a Christoffel-szimbólum[5], ∇_ρ pedig a kovariáns derivált.

Beszorozva a kifejezést az inverz metrikus tenzorral

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\left[\nabla_\rho\left(\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}\right)\right] = \nabla_\rho\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}\right), \tag{1.15}$$

ahol felhasználtuk, hogy a metrikus tenzor konnexió kompatibilis, azaz $\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$.[6]

Ha átírjuk az indexeket a második tagban, révén, hogy ν csak egy szummázási index, a következő kifejezést kapjuk

[3] A Ricci-tenzor $R_{\mu\nu}$, a Riemann-tenzornak az egyszeres kontraktálása, lásd 1.1 ábra

[4] A metrikus tenzor és inverze között a következő összefüggés áll fenn $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta^\nu_\mu$, ahol δ^ν_μ a Kronecker-delta.

[5] Ezek segítségével valósítható meg a párhuzamos eltolás görbült téridőn, lásd 1.1 ábra

[6] Ez a feltétel Einstein elméletének egyik alap építőeleme, és kimondja azt, hogy párhuzamos eltolás során, egy vektor hossza nem változik, avagy: a vektorok hossza egy kovariánsan megmaradó mennyiség. Léteznek azonban más geometriák, mint például a Weyl [15],[16] ahol a metrikus tenzor kovariáns deriváltja nem nulla, azaz $\widetilde{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu} \neq 0$, és a vektorok hossza változik ebben a geometriában párhuzamos eltolás után.

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho \underbrace{\left[g^{\mu\nu}\left(\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\right) - g^{\mu\rho}\left(\delta\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}\right)\right]}_{A^\rho} = \nabla_\rho A^\rho, \tag{1.16}$$

ahol A^ρ egy tetszőleges kontravariáns négyes-vektor.

Egy tetszőleges kontravariáns négyes-vektor esetén a kovariáns divergencia

$$\nabla_\rho A^\rho := \frac{\partial A^\rho}{\partial x^\rho} + \Gamma^\rho{}_{\rho\mu}A^\mu = \frac{\partial A^\rho}{\partial x^\rho} + \frac{A^\rho}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\rho} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(A^\rho\sqrt{-g}\right)}{\partial x^\rho}. \tag{1.17}$$

Eredményünket behelyettesítve a (1.13) egyenletben lévő második kifejezésbe

$$\begin{aligned} -\frac{c^3}{16\pi G}\int \delta(R_{\mu\nu})\sqrt{-g}g^{\mu\nu}d^4x &= -\frac{c^3}{16\pi G}\int \sqrt{-g}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(A^\rho\sqrt{-g}\right)d^4x \\ &= -\frac{c^3}{16\pi G}\int \frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(A^\rho\sqrt{-g}\right)d^4x. \end{aligned} \tag{1.18}$$

A Gauss-tétel értelmében az integrál átírható egy felületi integrállá az A^ρ vektorra vonatkozóan. Azonban kikötjük azt, hogy a gravitációs mező - amelyet a metrikus tenzor komponensei és annak deriváltjai írnak le - variációja nulla az integrálási tartomány peremén, vagyis

$$-\frac{c^3}{16\pi G}\int_\nu \frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(A^\rho\sqrt{-g}\right)d^4x \overset{\text{Gauss tétel}}{=} -\frac{c^3}{16\pi G}\int_\Omega A^\rho\sqrt{-g}dS_\rho \overset{!}{=} 0, \tag{1.19}$$

ahol $\nu \subset M$ és Ω pedig a peremét jelöli[7].

Ennek értelmében megkaptuk a végleges kifejezésünket a (1.10) gravitációs hatás variációjára

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G}\int\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x. \tag{1.20}$$

1.2. Az anyagi hatás variálása

A gravitációs téregyenletek levezetésében a következő lépés, hogy számítsuk ki az anyag hatásfüggvényenek variációját.

$$\begin{aligned} \delta S_m =& \frac{1}{c}\delta\left(\int \mathcal{L}_m\sqrt{-g}d^4x\right) = \frac{1}{c}\int\delta\left(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}\right)d^4x = \frac{1}{c}\int\frac{\partial\left(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}d^4x \\ =& \frac{1}{2c}\int T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x, \end{aligned} \tag{1.21}$$

ahol bevezettük az energia-momentum tenzort $T_{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}}$, mely egy másodrendű, szimmetrikus tenzor $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$. Ez a mennyiség alapvető szerepet játszik a gravitációs je-

[7] (M,g) a definiált sima (differenciálható) sokaságunk, mely leírja a téridőt, ν pedig egy tartománya, vagy pontosabbban egy alsokaság $\partial\nu := \Omega$.

lenségek leírásában, s láhatóan egyszerűen kiszámítható, amennyiben adott az anyagot jellemző Lagrange-sűrűség $\mathcal{L}_m$, illetve a metrikus tenzor. Tekintsünk néhány ismertebb példát az energia-momentum tenzorra:

1. Vákuum esetén, vagyis anyag hiányában, ez identikusan nulla $T_{\mu\nu} = 0$.

2. Ideális fluidum esetén[8]

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \tag{1.22}$$

   ahol p az izotróp nyomás, ρ a test energiasűrűsége, u_μ a négyessebesség.

3. Elektromágneses mező esetén

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} g^{\rho\sigma} - \frac{1}{4} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} g_{\mu\nu}, \tag{1.23}$$

   ahol $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ az elektromágneses Faraday tenzor.

1.3. Az Einstein-féle téregyenletek

Az utolsó lépés maradt hátra, pontosabban, hogy behelyettesítsük eredményeinket a (1.7) egyenletbe, melyből megkapjuk a téregyenleteket. Ezt az alább bemutatott egyszerű számítás illusztrálja

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_g + \delta S_m \\ &= -\frac{c^3}{16\pi G} \int \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} d^4x + \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= -\frac{c^3}{16\pi G} \int \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} d^4x \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Mivel a metrikus tenzor variációi $\delta g^{\mu\nu}$ tetszőlegesek, a következőt kapjuk

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R}_{:=G_{\mu\nu}} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \iff G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.25}$$

ahol bevezettük az ún. Einstein-tenzort $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ (lásd 1.1 ábra).

A (1.25) parciális differenciálegyenlet-rendszer a híres gravitációs téregyenleteket adja, melyet Einstein 1915-ben publikált. Ezek az egyenletek világosan rávilágítanak a geometria és anyag közötti mély kapcsolatra. Korábban említettük, hogy az energia-momentum tenzor kovariáns megmaradási törvényének a téregyenletekből kell levezethetőnek lennie. Ennek ellenőrzésére vegyük a divergenciáját a (1.25) egyenletnek

[8]Habár az ideális folyadék energia-momentum tenzorának formája viszonylag egyszerűen megadható, a variációs elvből való levezetése a 90-es évekig nyitott probléma volt [17].

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \nabla^\mu T_{\mu\nu}. \tag{1.26}$$

Az egyenlet bal oldala jól ismert, hiszen az ún. Bianchi-azonosságból könnyen kimutatható, hogy az Einstein-tenzor divergenciája nulla $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, melynek levezetése megtalálható az A.3 függelékben. Felhasználva a kapott eredményt, könnyen beláthatjuk, hogy a megmaradási törvény fennáll

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \tag{1.27}$$

Fontos megjegyezni, hogy a (1.25) egyenlet nem az Einstein-féle téregyenletek legáltalánosabb formája. A fizikai követelmények, például az energia-momentum megmaradási törvénye $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, akkor is teljesülnek, ha a bal oldali geometriai oldalhoz hozzáadunk egy olyan új tagot, amely arányos a metrikus tenzorral

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.28}$$

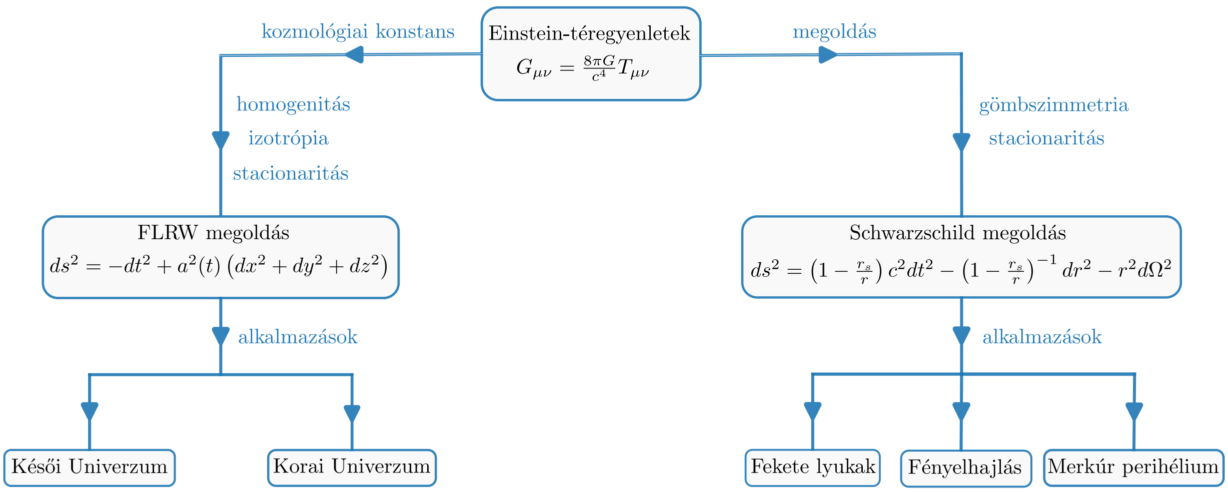
ahol Λ egy állandó, amelyet kozmológiai állandónak nevezünk.

A variációs elvből is egyszerűen levezethető, ha a gravitációs hatást átírjuk

$$S_g^{'} = S_g - \frac{c^3}{16\pi G} \int (-2\Lambda)\sqrt{-g} d^4x. \tag{1.29}$$

A kozmológiai állandót maga Einstein vezette be 1917-ben, alig néhány évvel az általános relativitáselmélet megalkotása után. Akkoriban az univerzumot statikusnak, változatlannak tekintették. Einstein felismerte, hogy a téregyenletei nem engedik meg egy ilyen statikus állapot stabil létezését, ezért bevezetett egy kiegészítő tagot a téregyenletekbe, mely egy taszító erőként szolgál ahhoz, hogy az Univerzum egyensúlyban maradjon. Edwin Hubble 1929-ben tett megfigyelései, hogy a galaxisok távolodnak egymástól, arra adtak következtetést, hogy az Univerzum mégis tágul, nem statikus. Ez Einstein eredeti statikus modelljét megingatta, ő maga pedig később a kozmológiai állandót a "legnagyobb baklövésének" tekintette. Meglepő módon azonban a modern kozmológia szerint a Λ-t nem lehet kihagyni: a megfigyelések azt mutatják, hogy az Univerzum gyorsulva tágul. Bár a tágulás megmagyarázható Λ nélkül, a gyorsuló tágulás nem. Emiatt, a Λ bevezetése szükséges az elméletbe, és a modern fizikában úgy tekintjük, hogy Λ a vákuum energiájához vagy a sötét energiához kapcsolódik, mely az Univerzum teljes energiatartalmának jelentős részét teszi ki.

Továbbiakban tekintsük át, hogy az Einstein-féle téregyenletek milyen fizikai jelenségek leírására alkalmasak. Az évtizedek során számos megoldás született a téregyenletekre, ezek közül most két kiemelkedően fontos példát említünk meg. Az első ismert (nemtriviális) egzakt megoldás a Schwarzschild-megoldás, amely egy statikus, gömbszimmetrikus objektum gravitációs terét írja le a gravitáció felszínén kívül. Ezt a megoldást főként az asztrofizikában alkalmazzák lassan forgó objektumok, például csillagok vagy fekete lyukak gravitációs terének modellezésére. Egy másik alapvető megoldás a Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) metrika, amely a kozmológiában játszik központi szerepet. Ez a metrika a téridő homogén és izotróp szerkezetét feltételezve írja le az Univerzumunk nagy léptékű fejlődését. A 1.2 ábra a két klasszikus megoldás - az FLRW és Schwarzschild metrika - példáján keresztül szemlélteti, hogy milyen kozmológiai és asztrofizikai jelenségek modellezésére alkalmasak.



1.2. ábra. Az általános relativitáselmélet alkalmazásai a kozmológiában és asztrofizikában. Amennyiben hozzáadjuk a kozmológiai konstanst az egyenletekhez és megkövetelünk homogenitást, izotrópiát és stacionaritást, a Friedmann metrikát kapjuk, amely megoldása a téregyenleteknek. Ezt lehet alkalmazni a késői, illetve korai Univerzum leírására. Amennyiben más szimmetriákat követelünk meg a metrikától, pl. a stacionaritást és a gömbszimmetriát, a Schwarzschild megoldáshoz jutunk, amelyet lehet alkalmazni fekete lyukakra, a fényelhajlásra és a Merkúr perihéliumának leírására.

Láthattuk, hogy az Einstein-féle általános relativitáselmélet számos jelenség leírására alkalmasnak bizonyult. Ugyanakkor fontos megjegyezni, hogy bizonyos hiányosságokkal is rendelkezik. Bár a kozmológiai állandó Λ bevezetése sikeresen magyarázza a Világegyetem gyorsuló tágulását, fizikai jelentése és eredete mindmáig tisztázatlan. Továbbá, fennáll a kozmológiai állandó problémája: elméleti kvantumtérelméleti számítások alapján a vákuumenergia hozzájárulása a kozmológiai állandó értékéhez mintegy 120 nagyságrenddel nagyobb lenne, mint amit a megfigyelések jeleznek. Ezt Steven Weinberg Nobel-díjas fizikus jelenleg minden idők legnagyobb eltéréseként, avagy az elméleti fizika legrosszabb predikciójaként, tartja számon. Emellett, bár a Λ értelmezhető vákuumenergiaként, és így összefüggésbe hozható a sötét energiával, nem ad magyarázatot a sötét anyag létezésére, és annak dinamikai hatásaira. Megjegyzendő azonban, hogy a galaxisok rotációs görbéire mért megfigyelési adatok nem magyarázhatók enélkül. Tehát gyakorlatilag az Einstein által megfogalmazott elméletbe, legalább két új mennyiséget kell bevezetnünk, amelynek fizikai eredete ismeretlen, ahhoz hogy az adatokat leírjuk. Egy harmadik, még súlyosabb probléma, hogy a kozmológiai standard ΛCDM modell alkalmazása a korai és késői Univerzum megfigyelési adataira eltérő eredményeket ad. A modell kulcsparamétereinek, például a Hubble állandónak, (H_0) az értékei a Planck műhold által mért kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás adatai, illetve a közeli Type Ia szupernóvák adatai alapján közel 5σ szignifikanciával különböznek egymástól. Ez az ellentmondás komoly feszültséget jelez az elméleti modell és a megfigyelések között.

Ezek a problémák vezettek ahhoz, hogy fokozott figyelem fordult az Einstein-féle relativitáselmélet kiterjesztésére és módosításaira. Fontos megjegyezni viszont, hogy az összes módosításnak teljesítenie kell azt, hogy a helyesen leírt megfigyelési adatoknál a módosítás legyen kvázi elhanyagolható értékű. Pontosabban, lokálisan az Einstein elmélet struktúrája megmarad, és nagyobb skálákon egy új, általánosabb elmélet helyettesíti. Amint a bevezetőben is említettük, több irányzat alakult ki a gravitációelmélet módosítására, amelyek részletes bemutatására a következő fejezetben térünk ki.

2. Módosított gravitációs elméletek

Az Univerzum késői korszakában megfigyelt gyorsuló tágulás, valamint a sötét anyag létezésére utaló legújabb megfigyelések komoly elméleti kihívást jelentenek az általános relativitáselmélet számára. Az egyik lehetséges magyarázat szerint nagy skálákon az Einstein-féle általános relativitáselmélet már nem alkalmazható, és a gravitációs kölcsönhatást egy általánosabb hatásfüggvény írja le. A továbbiakban ilyen módosított gravitációs elméletek lesznek bemutatva.

2.1. $f(R)$ gravitáció

Egy ígéretes irány, amelyet az utóbbi időben kiterjedten vizsgáltak, az $f(R)$ típusú módosított gravitációs elméletek, amelyekben a szokásos Einstein-Hilbert hatás helyébe a Ricci-skalár R tetszőleges függvénye lép. Ezen elméletek lehetőséget nyújtanak a klasszikus általános relativitáselmélet által nem magyarázott jelenségek értelmezésére, miközben megőrzik annak geometriai alapjait. Az $f(R)$ gravitációs modellek[18] egyik jelentős alkalmazása az Univerzum késői gyorsuló tágulásának értelmezése, melyre az utóbbi idők megfigyelései utalnak. Számos kozmológiai elmélet született ezen elméletek keretében, melyek képesek reprodukálni az észlelt gyorsúló tágulást. Emellett, az $f(R)$ gravitációs modellek képesek a galaxisokban megfigyelhető csillagok és más égitestek mozgásának értelmezésére anélkül, hogy feltételeznénk sötét anyag jelenlétét.[19][20]

A továbbiakban röviden bemutatjuk az $f(R)$ gravitáció téregyenleteinek levezetését. $f(R)$ gravitációban a négydimenziós téridőben elhelyezkedő fizikai rendszert jellemző hatásfüggvény a következő alakot ölti

$$S = \int \left[\frac{1}{16\pi G} f(R) + \mathcal{L}_m \right] \sqrt{-g} d^4 x, \tag{2.1}$$

ahol $f(R)$ egy tetszőleges analitikus függvény a Ricci skalár (R) függvényeként, G a Newton-féle gravitációs állandó, $\mathcal{L}_m$ az anyagot jellemző Lagrange-sűrűség.

Ismét a hatás metrikus tenzor szerinti variálásával kezdjük a levezetésünket

$$\begin{aligned}\delta S=\delta\int\left[\frac{1}{16\pi G}f(R)+\mathcal{L}_m\right]\sqrt{-g}d^4x&=\int\left[\frac{1}{16\pi G}\delta f(R)+\delta\mathcal{L}_m\right]\sqrt{-g}d^4x\\ =\int\left[\frac{1}{16\pi G}\left(\delta(f(R))\sqrt{-g}+f(R)\delta(\sqrt{-g})\right)+\delta\mathcal{L}_m\right]d^4x&\overset{!}{=}0.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Válasszuk szét a gravitációs és az anyagi hatást, és a továbbiakban összpontosítsunk a gravitációs hatásfüggvény variációjára

$$\begin{aligned}\delta S_g=&\frac{1}{16\pi G}\int\left[\delta(f(R))\sqrt{-g}+f(R)\delta(\sqrt{-g})\right]d^4x\\ =&\frac{1}{16\pi G}\int\left[f'(R)\sqrt{-g}\delta R+f(R)\delta(\sqrt{-g})\right]d^4x,\end{aligned}\tag{2.3}$$

ahol bevezettük az $f'(R):=\frac{df(R)}{dR}$ jelölést.

A Ricci skalár variációja a következőképpen írható fel

$$\delta R=R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu}-\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu},\tag{2.4}$$

ahol $\Box\equiv\nabla_\alpha\nabla^\alpha$ és felhasználtuk a B.1 függelékben található összefüggéseket.

Emlékezzünk vissza az előző fejezetbeli eredményünkre, az (1.11)-es egyenletre:

$$\delta\sqrt{-g}=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}(-g)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.\tag{2.5}$$

Behelyettesítve mindezeket a gravitációs hatás variációjába, vagyis a (2.3) egyenletbe, megkapjuk, hogy

$$\delta S_g=\frac{1}{16\pi G}\int\left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R)+f^{'}(R)(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu}-\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu})\right]\sqrt{-g}d^4x\tag{2.6}$$

$$=\frac{1}{16\pi G}\int\left[f^{'}(R)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R)+f^{'}(R)g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu}-f^{'}(R)\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}d^4x\tag{2.7}$$

Látható, hogy a metrikus tenzor variációja nem emelhető ki közvetlenül az egyes tagokból. Ezt a problémát azonban parciális integrálással kiküszöbölhetjük (lásd a B.1 függeléket részletes számításokért). Rövid számolást követően megkapjuk a gravitációs hatás variációjának végső alakját

$$\delta S_g=\frac{1}{16\pi G}\int\left[f^{'}(R)R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R)+(g_{\mu\nu}\Box-\nabla_\mu\nabla_\nu)f^{'}(R)\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x.\tag{2.8}$$

Ismét posztuláljuk a energia-momentum tenzorra a következő összefüggést

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}}. \tag{2.9}$$

Mindezek ismeretében annyi maradt hátra, hogy behelyettesítünk mindent a (2.3) hatás variációjába

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int \left[f^{'}(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f^{'}(R) - 8\pi G T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \stackrel{!}{=} 0. \tag{2.10}$$

Mivel a metrikus tenzor variációi $\delta g^{\mu\nu}$ tetszőlegesek, következik, hogy a téregyenletek a következő alakot öltik

$$f^{'}(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)f^{'}(R) = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{2.11}$$

Ezeket a téregyenleteket az $f(R)$ gravitáció téregyenleteink nevezzük.

Láthatjuk, hogy $f(R) = R$ választás esetén visszakapjuk a (1.25) Einstein-féle téregyenleteket. A továbbiakban vizsgálni fogjuk, hogy az energia-momentum tenzor itt is kovariánsan megmaradó mennyiség-e vagy sem.

Az Einstein-féle relativitáselméletben a Bianchi-azonosság (lásd a A.3 függeléket) segítségével beláttuk, hogy a téregyenletekből következik az energia-momentum tenzor megmaradása. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy ez a kovariáns megmaradási törvény az $f(R)$ gravitáció esetén is fennáll-e. Ehhez vegyük a (2.11) téregyenlet divergenciáját

$$\nabla^\mu \left[f^{'}(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)f^{'}(R) \right] = 8\pi G\nabla^\mu T_{\mu\nu}. \tag{2.12}$$

Az egyenlet bal oldalát részletesebben vizsgálva (lásd a B.1 függeléket), a következőt kapjuk

$$\begin{aligned} &\nabla^\mu \left[f^{'}(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)f^{'}(R) \right] \\ =&f'(R)\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f'(R) + (\nabla_\nu\Box - \Box\nabla_\nu)f'(R) \\ =&f'(R)\nabla^\mu G_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f'(R) - R_{\mu\nu}\nabla^\mu f'(R) = 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

ahol felhasználtuka következőket:

(i) az Einstein-tenzor divergenciája nulla $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$,

(ii) $\nabla_\nu\Box - \Box\nabla_\nu = -R_{\mu\nu}\nabla^\mu$.

Beláttuk tehát, hogy az egyenlet bal oldalának divergenciája eltűnik, így következik, hogy az energia-momentum tenzor kovariáns megmaradása, $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, $f(R)$ gravitációban is érvényes.

2.2. $f(R,T)$ gravitáció

Az általános relativitáselmélet egyik alternatív kiterjesztése az $f(R,T)$ gravitációs elmélet, amelyben a gravitációs hatást nemcsak a Ricci-skalár (R), hanem az energia-momentum tenzor nyoma (T) is befolyásolja. A T-től való függés motiválható például egzotikus, nem tökéletes fluidumok jelenlétével vagy kvantumhatásokkal, mint a konformális anomália. A modell variációs elvből származtatható, a hatásfüggvény metrikus tenzor szerinti variációjával. Fontos kiemelni, hogy az $f(R,T)$ gravitációban az energia-momentum tenzor divergenciája általában nem tűnik el, mivel az anyag és a geometria között nemminimális csatolás[1] jön létre.[21][1]

Az egyik legfontosabb modellcsalád az $f(R,T^{\phi})$ modellekből áll, ahol T^{ϕ} egy skalármezőhöz tartozó energia-momentum tenzor nyoma. Ezekben a modellekben a skalármezők alapvető szerepet játszanak az infláció, a gyorsuló kozmikus tágulás, valamint a sötét anyaggal kapcsolatos jelenségek leírásában (lásd [19]).

$f(R,T)$ gravitációban a nagy tömegű tesztrészecskék mozgása nem geodetikus[2], az anyag-geometria közötti nemminimális csatolás extra gyorsuláshoz vezet. Ez az extra gyorsulás többek között hatással van a bolygók mozgására, így például a Merkúr perihéliumának elhajlása vizsgálható ezen modellek alapján, amely fontos korlátot ad az extra gyorsulás mértékére.

Továbbiakban hasonlóan, mint az előző alfejezetben, bemutatjuk az $f(R,T)$ gravitáció téregyenleteinek levezetését. Induljunk ki a rendszert jellemző hatásfüggvény definiálásával

$$S = \int \left[\frac{1}{16\pi} f(R,T) + \mathcal{L}_m \right] \sqrt{-g} d^4x, \tag{2.14}$$

ahol $f(R,T)$ egy tetszőleges analitikus függvény, mely a Ricci skalártól R és az anyag energia-momentum tenzorának nyomától T függ, G a Newtoni-gravitációs állandó, $\mathcal{L}_m$ az anyagot jellemző Lagrange-sűrűség.

A téregyenletek levezetéséhez első lépésben a hatást a metrikus tenzor szerinti variáljuk

$$\delta S = \delta(S_g + S_m) = \delta S_g + \delta S_m = \delta \int \left[\frac{1}{16\pi} f(R,T) + \mathcal{L}_m \right] \sqrt{-g} d^4x \overset{!}{=} 0. \tag{2.15}$$

Tekintsük a gravitációs hatás variációját

$$\begin{aligned} \delta S_g =& \frac{1}{16\pi} \delta \left(\int f(R,T) \sqrt{-g} d^4x \right) = \frac{1}{16\pi} \int \big(f(R,T) \delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} \delta(f(R,T)) \big) d^4x = \\ =& \frac{1}{16\pi} \int \big(f(R,T) \delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} \left(f_R(R,T) \delta R + f_T(R,T) \delta T \right) \big) d^4x = \\ =& \frac{1}{16\pi} \int \left(f(R,T) \delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} \left(f_R(R,T) \delta R + f_T(R,T) \frac{\partial (g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right) \right) d^4x, \end{aligned} \tag{2.16}$$

[1] Nemminimális csatolás alatt azt értjük, hogy az anyagmezők vagy az anyag Lagrange-sűrűsége nemcsak a metrikán, hanem közvetlenül a görbületi mennyiségeken keresztül is csatolódik a geometriához.

[2] A geodetikus mozgás alatt azt értjük, hogy a részecske külső erőhatás nélkül, csak a téridő görbülete által meghatározott legrövidebb pályán (geodetikuson) mozog.

ahol $f_R(R,T) \equiv \frac{\partial f(R,T)}{\partial R}$, $f_T(R,T) \equiv \frac{\partial f(R,T)}{\partial T}$ és $T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$.

Felhasználva korábbi eredményeinket a Ricci skalár variációjára (2.4), illetve a metrikus tenzor determinánsának variációjára (1.11), a gravitációs hatás variációja a következő alakot ölti

$$\begin{aligned} \delta S_g =& \frac{1}{16\pi}\int\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R,T) + f_R(R,T)R_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)f_R(R,T) + \right. \\ & \left. + f_T(R,T)\frac{\partial(g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Emlékezzünk az energia-momentum tenzor definíciójára:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}}. \tag{2.18}$$

Behelyettesítve mindent a (2.15) hatás variációjába, majd figyelembe véve, hogy a metrikus tenzor variációi tetszőlegesek, megkapjuk a téregyenleteket $f(R,T)$ gravitációban

$$f_R(R,T)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R,T)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R,T) = 8\pi T_{\mu\nu} - f_T(R,T)T_{\mu\nu} - f_T(R,T)\Theta_{\mu\nu}, \tag{2.19}$$

ahol bevezettük a következő mennyiséget, $\Theta_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta}\frac{\partial(T_{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}}$.

Könnyen belátható, hogy ha az energia-momentum tenzor nyomára $T = 0$ feltételt szabunk, így $f(R,T) = f(R)$ lesz, akkor visszanyerjük az $f(R)$ gravitáció téregyenleteit (2.11) (igazoláshoz lásd a B.2 függeléket).

A fejezet bevezetőjében említésre került, hogy az anyag és geometria közötti nemminimális csatolás következtében az energia-momentum tenzor nem egy kovariánsan megmaradó mennyiség. Ennek bizonyítására vegyük a (2.19) összefüggés divergenciáját

$$\begin{aligned} &\nabla^\mu\left[f_R(R,T)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R,T) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R,T)\right] = \nabla^\mu\left[8\pi T_{\mu\nu} - \right. \\ &\left. - T_{\mu\nu}f_T(R,T) - \Theta_{\mu\nu}f_T(R,T)\right]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Rövid számolás után (részletes levezetésért lásd a B.2 függeléket) a következő összefüggéshez jutunk:

$$\begin{aligned} \nabla^\mu T_{\mu\nu} =& \frac{1}{8\pi + f_T(R,T)}\left[-\frac{1}{2}f_T(R,T)\nabla_\nu T + (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu})\nabla^\mu f_T(R,T) + \right. \\ & \left. + f_T(R,T)\nabla_\nu\mathcal{L}_m - 2g^{\alpha\beta}f_T(R,T)\nabla^\mu\frac{\partial^2\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}\right]. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Innen egyszerűen belátható, hogy az $f(R,T)$ gravitációban az anyag és geometria közötti nemminimális csatolás következtében az energia-momentum tenzor nem egy kovariánsan megmaradó mennyiség, avagy $\nabla^\mu T_{\mu\nu} \neq 0$.

2.3. $f(R, \mathcal{L}_m)$ gravitáció

Az $f(R)$ típusú módosított gravitációs elméletek egy további általánosítása az $f(R, \mathcal{L}_m)$ gravitáció. Ebben a modellben is fennáll, hogy az energia-momentum tenzor divergenciája nem tűnik el, mivel az anyag és a geometria között nemminimális csatolás jön létre. Ennek következtében a tesztrészecskék mozgása nem geodetikus, mivel a nemminimális csatolás egy kiegészítő erő megjelenését eredményezi.

Az $f(R, \mathcal{L}_m)$ gravitációs elmélet egyik speciális alkalmazása az interakcióban lévő sötét energia relativisztikusan kovariáns modellje, amely a stacionárius hatás elvén alapul. Ebben a megközelítésben a kozmológiai állandó a gravitációs Lagrange-sűrűségben az energia-momentum tenzor nyomának függvénye, $\Lambda(T)$, így a modellt $\Lambda(T)$ gravitációként ismerjük. A legújabb kozmológiai megfigyelések azt sugallják, hogy a kozmológiai állandó valójában nem állandó, hanem időben változó mennyiség lehet, ami összhangban áll a $\Lambda(T)$ gravitációs elméletekkel [19, 20].

A továbbiakban bemutatjuk az $f(R, \mathcal{L}_m)$ gravitáció téregyenleteinek levezetését. A hatást a következőképpen definiáljuk:

$$S = \int f(R, \mathcal{L}_m)\sqrt{-g}d^4x, \tag{2.22}$$

ahol $f(R, \mathcal{L}_m)$ egy tetszőleges analitikus függvény, mely a Ricci skalártól R és anyaghoz tartozó Lagrange-sűrűségtől $\mathcal{L}_m$ függ.

Variálva a hatást a metrikus tenzor szerint

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int f(R, \mathcal{L}_m)\sqrt{-g}d^4x = \int \left(\sqrt{-g}\delta f(R, \mathcal{L}_m) + f(R, \mathcal{L}_m)\delta\sqrt{-g}\right) d^4x = \\ &= \int \left[f_R(R, \mathcal{L}_m)\delta R + f_{\mathcal{L}_m}(R, \mathcal{L}_m)\delta\mathcal{L}_m - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R, \mathcal{L}_m)\delta g^{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}d^4x = \\ &= \int \Bigg[R_{\mu\nu}f_R(R, \mathcal{L}_m) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R, \mathcal{L}_m) + f_{\mathcal{L}_m}(R, \mathcal{L}_m)\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \\ &-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R, \mathcal{L}_m)\Bigg]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x \overset{!}{=} 0, \end{aligned} \tag{2.23}$$

ahol bevezettük a $f_R(R, \mathcal{L}_m) \equiv \frac{\partial f(R, \mathcal{L}_m)}{\partial R}$, $f_{\mathcal{L}_m}(R, \mathcal{L}_m) \equiv \frac{\partial f(R, \mathcal{L}_m)}{\partial \mathcal{L}_m}$ jelöléseket, illetve felhasználtuk korábbi eredményeinket a Ricci skalár variációjára (2.4) és a metrikus tenzor determinánsának variációjára (1.11).

Az anyagot jellemző Lagrange-sűrűség metrikus tenzor szerinti parciális deriváltja (ennek levezetése a B.2 függelékben található) a következő alakot ölti:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - \frac{1}{2}T_{\mu\nu}. \tag{2.24}$$

Behelyettesítve eredményünket a (2.23) hatás variációjába

$$\delta S = \int \Bigg[R_{\mu\nu} f_R(R,\mathcal{L}_m) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu) f_R(R,\mathcal{L}_m) + \frac{1}{2} f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - \\ -\frac{1}{2} f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R,\mathcal{L}_m) \Bigg] \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^4x \overset{!}{=} 0. \tag{2.25}$$

A metrikus tenzor variációi $\delta g^{\mu\nu}$ tetszőlegesek, ezáltal az $f(R,\mathcal{L}_m)$ gravitáció téregyenleteihez jutottunk

$$R_{\mu\nu} f_R(R,\mathcal{L}_m) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu) f_R(R,\mathcal{L}_m) - \frac{1}{2}[f(R,\mathcal{L}_m) - \\ - f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\mathcal{L}_m] g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) T_{\mu\nu}. \tag{2.26}$$

Ha a specifikus választást vesszük, hogy $f(R,\mathcal{L}_m) = \frac{1}{2}f(R) + \mathcal{L}_m$, akkor visszakapjuk az $f(R)$ gravitáció téregyenleteit (2.11) (részletes bizonyításhoz lásd a B.3 függeléket).

Ebben az elméletben is fennáll, hogy az anyag és a geometria közötti nemminimális csatolás miatt az energia-momentum tenzor megmaradása sérül. Ennek igazolására vegyük a (2.26) téregyenlet divergenciáját

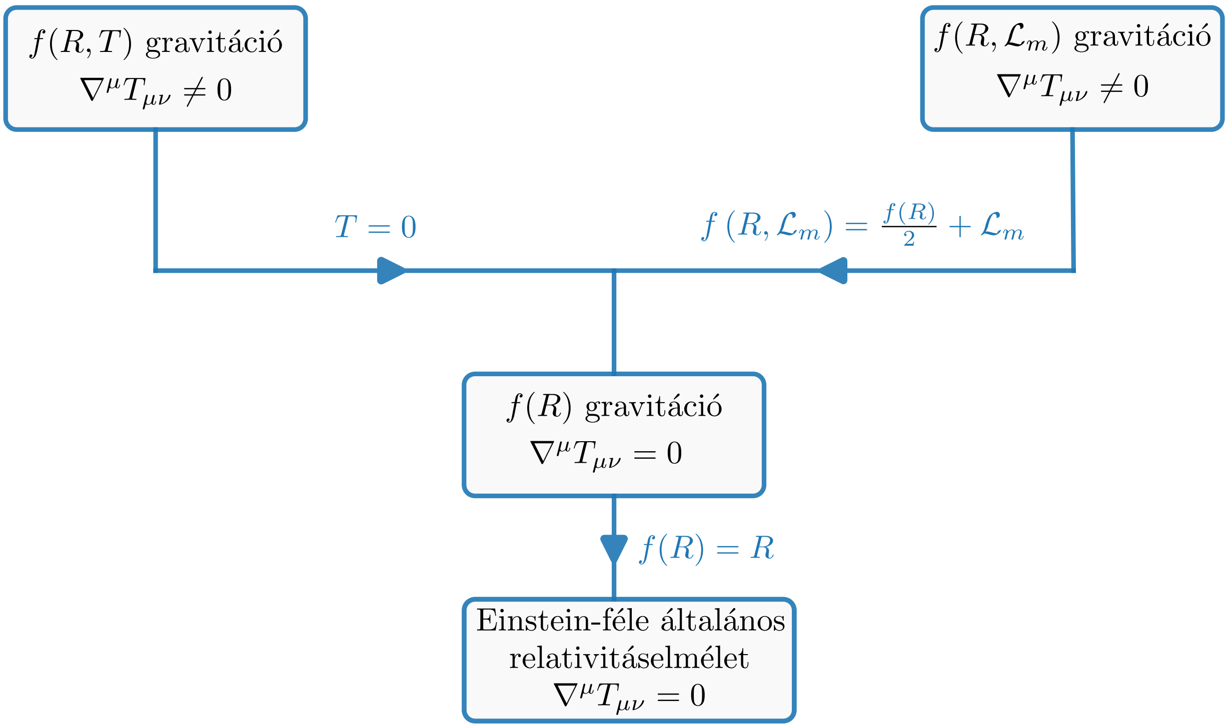
$$\nabla^\mu \Bigg[R_{\mu\nu} f_R(R,\mathcal{L}_m) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu) f_R(R,\mathcal{L}_m) - \frac{1}{2}[f(R,\mathcal{L}_m) - \\ - f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\mathcal{L}_m] g_{\mu\nu} \Bigg] = \frac{1}{2} \nabla^\mu \left[f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) T_{\mu\nu} \right]. \tag{2.27}$$

Rövid számolás után eljutunk a következő összefüggéshez (részletes levezetéshez lásd a B.3 függeléket)

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{2}{f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)} \left[\frac{1}{2} (g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - T_{\mu\nu}) \nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) \right], \tag{2.28}$$

melyből látható, hogy valóban $f(R,\mathcal{L}_m)$ gravitációban az anyag és geometria közötti nemminimális csatolás következtében az energia-momentum tenzor nem marad meg $\nabla^\mu T_{\mu\nu} \neq 0$. Ezen fejezet munkája a 2.1 által van összegezve. Az ábrán szemléltettük a feltételeket, amelyek mellett a fejezetben tanulmányozott módosított gravitációs elméletek visszavezethetők az Einstein-féle relativitáselméletre. Továbbá, azt is kiemeltük, hogy melyik elméletben kovariánsan megmaradó mennyiség az energia-momentum tenzor, illetve melyikben nem az.

Láthattuk, hogy bizonyos módosított gravitációs elméletekben az energia-momentum tenzor nem marad meg az anyag és a geometria közötti nemminimális csatolás következtében. Ez számos nehézséget vet fel, mivel a probléma mélyebb megértéséhez kvantumtérelméleti eszközök alkalmazása lenne szükséges. A bevezetőben említettük, hogy a nyílt rendszerek termodinamikájában az energia-momentum tenzor nemmegmaradása értelmezhető úgy, mint egy irreverzibilis energiaáramlás a gravitációs szektorból az anyag szektorába, amely részecskék keletkezéséhez vezethet, bár e részecskék pontos eredete továbbra sem ismert. Munkánk célja, hogy ezt a problémát klasszikus kereteken belül kezeljük, elkerülve a kvantumtérelméleti bo-



2.1. ábra. A módosított gravitációs elméletek visszavezethetősége az Einstein-féle általános relativitáselméletre. Az $f(R,T)$ nemkonzervatív elméletből visszakapjuk az $f(R)$ elméletet, amennyiben $T = 0$. Hasonlóan, a nemkonzervatív $f(R,\mathcal{L}_m)$ elméletből a $f(R,\mathcal{L}_m) = \frac{f(R)}{2} + \mathcal{L}_m$ függvény választásával visszakapjuk a konzervatív $f(R)$ elméletet. Tehát mindkét elmélet visszavezethető az Einstein-féle $f(R) = R$ elméletre, specifikus körülmények között.

nyodalmakat. Ezt a célt szolgálja a Herglotz-féle variációs elv, amelynek részletes bemutatása a következő fejezetben történik meg.

3. Herglotz variációs elv

Ebben a fejezetben ismertetjük a Herglotz variációs elvet, a klasszikus variációs elvnek egy általánosítását, mely lehetővé teszi nemkonzervatív, avagy disszipatív rendszerek leírását is. Annak ellenére, hogy a disszipáció fogalma térelméleteken belül bonyolult [22], ebben a dolgozatban úgy definiáljuk, mint az energia-momentum tenzor nem megmaradó volta. Miután részletesen bemutatjuk az elméleti alapokat, alkalmazzuk a csillapított oszcillátor leírására. Gravitációelméleti alkalmazásokra, kiterjesztjük a Herglotz elvet mezőkre is, majd alkalmazzuk az előző fejezetben bemutatott elméletekre, hogy oldjuk meg az előzőleg említett problémákat klasszikus térelmélet keretein belül.

3.1. Herglotz variációs elv a klasszikus fizikában

A klasszikus variációs elv a modern fizika egyik alapvető és elengedhetetlen eszköze. Általánosan a következőképpen tudjuk megfogalmazni

$$\delta S = 0, \tag{3.1}$$

$$S[q(t)] = \int_a^b L\left(q(t), \dot{q}(t), t\right) dt, \tag{3.2}$$

ahol S a hatásfunkcionál, L a Lagrange-függvény, $q(t)$ pedig az általánosított időfüggő koordináták. A klasszikus variációs probléma megoldása meghatározza a $q(t)$ pályát, mely extremizálja az S funkcionált az Euler-Lagrange egyenleteken keresztül:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{3.3}$$

Ismeretes, hogy a hagyományos variációs elv nehezen képes disszipatív rendszerek kezelésére, mivel nem alkalmas olyan mozgásegyenletek előállítására, amelyek elsőrendű idő szerinti deriváltakat tartalmaznak. Az ilyen típusú rendszerek leírására vezette be Herglotz 1930-ban az ún. Herglotz-féle variációs elvet[1] . Ez az elv abban különbözik a hagyományos megközelítéstől, hogy a Lagrange-függvényt maga a hatás is befolyásolhatja. Ennek megfelelően a hatást differenciálegyenlet formájában kell definiálnunk

$$\dot{S} = L\left(q(t), \dot{q}(t), S, t\right), \tag{3.4}$$

ahol a peremfeltételeket $S(a) = S_a$, $q(a) = q_a$, $q(b) = q_b$ szerint rögzítjük.

A fenti összefüggés variációjából megkaphatjuk az általánosított Euler-Lagrange egyenleteket (levezetés a C.1 függelékben)

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial S}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{3.5}$$

Könnyen belátható, hogy ha $\partial L/\partial S = 0$ feltételt szabunk meg, akkor a Herglotz-féle variációs elv visszavezetődik a hagyományos Euler–Lagrange-egyenletekre (3.3).

A továbbiakban egy egyszerű alkalmazáson keresztül vizsgáljuk meg a Herglotz-féle variációs elv működését. Tekintsük a csillapított oszcillátor esetét, amely az egyik legismertebb disszipatív mechanikai rendszer. A szakirodalomból ismert, hogy ez a rendszer a klasszikus variációs elv keretében is leírható, azonban ez jelentős nehézségekbe ütközik. A hagyományos formaliz-

[1]Megjegyzendő viszont, hogy nem lehetséges egy tetszőleges (parciális)differenciálegyenlet-rendszert az egyszerű variációs elvből levezetni. Azon feltételek, amelyek teljesülése révén levezethetők, Douglas által voltak felfedezve, és a Helmholtz[23][24][25] nevet viselik. Lehetséges azonban, hogy új, általánosabb variációs elvekből (például Herglotz) levezethetőek a téregyenletek, de még ez sem garantált. Egy mélyebb áttekintéshez, az érdeklődő olvasót a [26] igazítjuk.

musban a Lagrange-függvény nem a kinetikus és potenciális energia egyszerű különbségeként jelenik meg, hanem egy explicit időfüggő súlyfaktort tartalmaz:

$$L = e^{\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x)\right). \tag{3.6}$$

Vizsgáljuk meg most a csillapított oszcillátor mozgásegyenleteinek levezetését a Herglotz-féle variációs elv alkalmazásával. Tekintsük az alábbi Lagrange-függvényt:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) - \frac{\gamma}{m}S, \tag{3.7}$$

ahol m a részecske tömege, $U(x)$ a potenciál, amelyben a részecske mozog, és γ a csillapítási tényező. Az általánosított Euler-Lagrange egyenleteket (3.5) fogjuk használni. Először számoljuk ki az egyes tagokat

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{dU}{dx}, \tag{3.8}$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -m\ddot{x}, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial S} = -\frac{\gamma}{m}. \tag{3.10}$$

Behelyettesítve a (3.5) egyenletbe megkapjuk a rendszert jellemző mozgásegyenleteket

$$-\frac{dU}{dx} - m\ddot{x} - \frac{\gamma}{m}m\dot{x} = 0, \tag{3.11}$$

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = -\frac{dU}{dx}. \tag{3.12}$$

Abban a speciális esetben, amikor $U(x) = \frac{kx^2}{2}$, a fenti kifejezésből kapjuk, hogy

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = -kx, \tag{3.13}$$

$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = 0, \tag{3.14}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0, \quad \text{ahol} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{3.15}$$

A (3.15) egyenlet a csillapított oszcillátor mozgásegyenlete. Látható tehát, hogy néhány egyszerű számítással a Herglotz-féle variációs elvből le tudtuk vezetni egy disszipatív rendszer mozgásegyenleteit.

Mielőtt alkalmazhatnánk a Herglotz formalizmust gravitációelméletekben, először ki kell terjesztenünk mezőelméletekre. A független időváltozó t helyett áttérünk a 3+1 dimenziós téridő x^μ koordinátáira, az általánosított $q(t)$ koordinátát pedig $\phi(x^\mu)$ mezővé emeljük. Legyen $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ a (Minkowski, sík) téridő $\mathcal{M}$ egy alhalmaza, amelynek peremét Ω-val, az ehhez tartozó kifelé mutató normálvektort pedig η_μ-vel jelöljük. Bevezetve az s^μ hatássűrűséget, a teljes hatás az alábbi formában írható fel:

$$S = \int_\Omega \eta_\mu s^\mu d^{n-1}x = \int_\mathcal{V} \partial_\mu s^\mu d^n x, \tag{3.16}$$

ahol a két alakot a Stokes-tétel alkalmazásával kapcsoltuk össze.

Ebben az esetben a (3.4) kifejezés a következő formát ölti

$$\partial_\mu s^\mu = \mathcal{L}\left(\phi(x^\mu), \partial_\nu\phi(x^\mu), s^\mu, x^\mu\right), \tag{3.17}$$

megfelelően választott peremfeltételek mellett.

A C.1 függelékben bemutatott bizonyításhoz hasonlóan, a következő általánosított Euler-Lagrange egyenleteket kapjuk mezőkre

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0. \tag{3.18}$$

A fenti összefüggés alkalmazható például nem-konzervatív elektromágneses elméletek esetén, melyből röviden levezethetőek a nem-konzervatív Maxwell-egyenletek.[27] Az elméletet alkalmazták egy elektron mozgásának leírására nem ideális vezetőben, valamint korrekciós tagokat vezettek be a ciklotronsugárzás modellezésére, mindezt a Herglotz variációs elv által [28]. Emellett levezették a módosított Poynting-tételt, amelyet a Lorentz-dipól modellre és nagy ellenállású dielektrikumokra is alkalmaztak.

3.2. Herglotz variációs elv gravitációelméletekben

A bevezetőben megemlítettük, hogy korábbi munkák már alkalmazták a Herglotz-elvet gravitációs elméletekben, azonban ezek motivációja gyakran nem volt világos: a disszipációt sok esetben mesterségesen vezették be olyan elméletekbe, amelyek eredetileg nem disszipatívak. A 2. fejezet végén hangsúlyoztuk, hogy azokban a módosított gravitációs elméletekben, ahol nemminimális csatolás áll fenn az anyag és a geometria között, az energia-momentum tenzor kovariáns megmaradása sérül (lásd 2.1 ábra). Ezt a problémát kívánjuk megoldani a Herglotz-féle variációs elv alkalmazásával. Célunk, hogy a téregyenletekben megjelenő új disszipatív tagokra olyan dinamikai feltételt vezessünk be, amely biztosítja az energia-momentum tenzor kovariáns megmaradását. Továbbá, egy komoly probléma az $f(R,T)$ elméletekben, hogy az energia-momentum tenzor nem megmaradó volta, specifikus additív $f(R,T) = f_1(R) + f_2(T)$ függvényekre komoly problémát okoz a kísérleti adatok leírására [11]. Felmerül tehát a kérdés, hogy a Herglotz kontribúció ezen modelleket tudja-e korrigálni, vagy sem.

Felvezetésként először bemutatjuk a Herglotz formalizmus alkalmazását az Einstein-féle általános relativitáselméletben, valamint az $f(R)$ gravitációban. Bár ezek az alkalmazások már megjelentek a szakirodalomban, kutatásunk során kisebb matematikai pontatlanságokat találtunk az egyes levezetésekben[2], amelyeket jelen dolgozatban korrigálni és pontosítani kívánunk. Ezt követően a Herglotz-elvet kiterjesztjük az $f(R,T)$ és az $f(R,\mathcal{L}_m)$ gravitációs elméletekre is, bemutatva, hogy milyen feltételek szükségesek a Herglotz-féle disszipatív tagokra az energia-momentum tenzor kovariáns megmaradásának biztosítása érdekében.

3.2.1. Herglotz variációs elv Einstein-féle általános relativitáselméletben

Legyen (M,g) egy n-dimenziós sima (differenciálható) sokaság, ahol g Lorentz-metrika. Tekintsük egy tartományát a sokaságnak $\nu \subset M$, amelynek határát Ω-val jelöljük, és amelynek egység normálvektor η_μ, indukált metrikája pedig h. Az általános Herglotz variációs elvet az alábbi módon fogalmazhatjuk meg

$$S(\Omega) = \int_\Omega \eta_\mu s^\mu \sqrt{-h} d^{n-1}x = \int_\nu \nabla_\mu s^\mu \sqrt{-g} d^n x, \tag{3.19}$$

ahol a Stokes-tételt alkalmaztuk. A hatássűrűség divergenciája az alábbi módon van meghatározva

$$\nabla_\mu s^\mu = \mathcal{L}(x^\nu, g_{\alpha\beta}, \partial_\sigma g_{\alpha\beta}, s^\nu), \tag{3.20}$$

peremfeltételek mellett, amelyek előírják, hogy $g_{\alpha\beta}$ és $\partial_\sigma g_{\alpha\beta}$ rögzítettek a Ω határon.

A rendszert jellemző Lagrange-sűrűség

$$\mathcal{L} = F\mathcal{L}_m + R + \lambda_\nu s^\nu, \tag{3.21}$$

ahol $\mathcal{L}_m$ az anyagot jellemző Lagrange-sűrűség, F pedig egy csatolási állandó, mely potenciálisan függhet a koordinátáktól, λ_ν pedig a Herglotz-mező, amely egy tetszőleges vektormező, és a disszipatív együttható szerepét tölti be.

Variálva a (3.19) kifejezést a metrikus tenzor szerint, megkapjuk, hogy $\delta s^\mu = 0$. Vezessük be a következő mennyiséget $\phi := \int \lambda_\mu(x) dx^\mu$, melynek segítségével (3.20) kifejezés átírható a következő alakba (részletes levezetés a C.2 függelékben)

$$[\delta(s^\mu \sqrt{-g}) e^{-\phi}]_{,\mu} = e^{-\phi} \delta(R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + F(x)\mathcal{L}_m \sqrt{-g}), \tag{3.22}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\nabla_\mu(.)\sqrt{-g} = \partial_\mu(.\sqrt{-g})$.

Vegyük a fenti kifejezés integrálját. A bal oldal a Stokes-tétel alapján nullává válik

[2] Pontosabban azt szeretnénk kiemelni, hogy a [3] dolgozat téregyenletei, végső eredményei helyesek, de a közbenső matematikai lépések nem azok, tartalmaznak úgy elírási (typing), mint matematikai hibákat is - ezeket a hibákat a szerzők megerősítették egy levelezés során.

(részletekért lásd a C.2 függeléket). Vizsgáljuk részletesebben az egyenlet jobb oldalát

$$\int_\nu e^{-\phi}(R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}+R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}+\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu})d^nx+\int_\nu e^{-\phi}\delta(F\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^nx \tag{3.23}$$

$$\int_\nu e^{-\phi}[\underbrace{(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)}_{G_{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}+g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}]\sqrt{-g}d^nx+\int_\nu e^{-\phi}\delta(F\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^nx \tag{3.24}$$

$$\int_\nu e^{-\phi}(g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}+G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})\sqrt{-g}d^nx+\int_\nu e^{-\phi}F\delta(\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^nx=0. \tag{3.25}$$

A számítások elvégzése után (részletes levezetés a C.2 függelékben) az alábbi eredményhez jutunk

$$\int_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}(K_{\mu\nu}+G_{\mu\nu}-\frac{F}{2}T_{\mu\nu})d^nx=0, \tag{3.26}$$

ahol bevezettük a $K_{\mu\nu}$ tenzort az alábbi definíció szerint $K_{\mu\nu}:=\Lambda_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}\Lambda$, a $\Lambda_{\mu\nu}$ mennyiségeket pedig, mint $\Lambda_{\mu\nu}:=\frac{1}{2}(\lambda_{\mu;\nu}+\lambda_{\nu;\mu})-\lambda_\mu\lambda_\nu$ és $\Lambda=\Lambda^\mu_\mu$; $T_{\mu\nu}=-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}}$.

A metrikus tenzor variációi $\delta g^{\mu\nu}$ tetszőlegesek, melyből megkapjuk az Einstein-féle téregyenleteket Herglotz-elvből

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+K_{\mu\nu}=\frac{F}{2}T_{\mu\nu}. \tag{3.27}$$

A klasszikus Einstein-féle téregyenleteket (1.26) visszakapjuk, ha $\lambda_\mu=0$ és $F=16\pi G/c^4$. Belátható, ha vesszük a divergenciáját a fenti kifejezésnek

$$\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+K_{\mu\nu}\right)=\frac{F}{2}\nabla^\mu T_{\mu\nu}, \tag{3.28}$$

az energia-momentum tenzor csak akkor fog megmaradni, ha kikötjük, hogy $\nabla^\mu K_{\mu\nu}=0$, hiszen beláttuk, hogy az Einstein-féle téregyenletekből természetesen következik, hogy az energia-momentum divergenciája nulla.

3.2.2. Herglotz variációs elv $f(R)$ gravitációban

A lépések hasonlóak lesznek, mint az előző alfejezetben, a különbség abban nyílvánul meg, hogy a (3.21) Lagrange-sűrűségben a Ricci skalár R helyett, egy tetszőleges analitikus függvényt veszünk $f(R)$, mely a Ricci skalártól függ. A Herglotz variációs elvet az alábbi módon definiáljuk

$$S(\Omega)=\int_\Omega\eta_\mu s^\mu\sqrt{-h}d^{n-1}x=\int_\nu\nabla_\mu s^\mu\sqrt{-g}d^nx. \tag{3.29}$$

$$\nabla_\mu s^\mu=F\mathcal{L}_m+f(R)+\lambda_\nu s^\nu, \tag{3.30}$$

kikötve peremfeltételként, hogy $g_{\alpha\beta}$ és $\partial_\sigma g_{\alpha\beta}$ rögzítettek a Ω határon.

Variálva a (3.29) kifejezést a metrikus tenzor szerint, megkapjuk, hogy $\delta s^\mu=0$. Vezessük be a $\phi:=\int\lambda_\mu(x)dx^\mu$ mennyiséget, melynek segítségével (3.30) kifejezés átírható a következő alakba:

$$[\delta(s^\mu\sqrt{-g})e^{-\phi}]_{,\mu} = e^{-\phi}\delta(f(R)\sqrt{-g} + F(x)\mathcal{L}_m\sqrt{-g}). \tag{3.31}$$

Vegyük a fenti kifejezés integrálját (lásd C.3 függelék), majd megkapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\int_\nu e^{-\phi}\delta(f(R)\sqrt{-g} + F\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^nx \\ &= \int_\nu e^{-\phi}(\sqrt{-g}\delta f(R) + f(R)\delta\sqrt{-g})d^nx + \int_\nu e^{-\phi}F\delta(\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^nx = 0.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Elvégezve a szükséges számításokat (részletes levezetés a C.3 függelékben)

$$\begin{aligned}&\int_\nu d^nxe^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}[R_{\mu\nu}f'(R) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) + f'(R)K_{\mu\nu} - \\ &- 2g_{\mu\nu}\lambda_\beta\partial^\beta(f'(R)) + \lambda_\mu\partial_\nu(f'(R)) + \lambda_\nu\partial_\mu(f'(R)) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) - \frac{F}{2}T_{\mu\nu}]d^nx = 0,\end{aligned} \tag{3.33}$$

ahol $K_{\mu\nu} := \Lambda_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda$, $\Lambda_{\mu\nu} := \frac{1}{2}(\lambda_{\mu;\nu} + \lambda_{\nu;\mu}) - \lambda_\mu\lambda_\nu\Lambda = \Lambda^\mu_\mu$ és $f'(R) = \frac{df(R)}{dR}$.

A metrikus tenzor variációi $\delta g^{\mu\nu}$ tetszőlegesek, melyből megkapjuk az $f(R)$ gravitáció téregyenleteket Herglotz-elvből

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) + H_{\mu\nu} = \frac{F}{2}T_{\mu\nu}, \tag{3.34}$$

ahol a Herglotz-mező járuléka meghatározás szerint

$$H_{\mu\nu} := f'(R)K_{\mu\nu} + \lambda_\mu\partial_\nu(f'(R)) + \lambda_\nu\partial_\mu(f'(R)) - 2g_{\mu\nu}\lambda_\beta\partial^\beta(f'(R)). \tag{3.35}$$

Ha $\lambda_\mu = 0$ és $F = 16\pi$ feltételeket írjuk elő, akkor visszakapjuk a korábban levezetett $f(R)$ gravitáció téregyenleteit (2.11). Emellett ismét azt tapasztaljuk, hogy az energia-momentum tenzor megmaradása csak akkor biztosított, ha a Herglotz járulékra teljesül, hogy $\nabla^\mu H_{\mu\nu} = 0$.

3.2.3. Herglotz variációs elv $f(R,T)$ gravitációban

A Herglotz variációs elvet $f(R,T)$ gravitációban - az előző alfejezetekben hasonlóan - a következőképpen definiáljuk

$$S(\Omega) = \int_\Omega \eta_\mu s^\mu\sqrt{-h}d^{n-1}x = \int_\nu \nabla_\mu s^\mu\sqrt{-g}d^nx. \tag{3.36}$$

$$\nabla_\mu s^\mu = F\mathcal{L}_m + f(R,T) + \lambda_\nu s^\nu, \tag{3.37}$$

kikötve peremfeltételként, hogy $g_{\alpha\beta}$ és $\partial_\sigma g_{\alpha\beta}$ rögzítettek a Ω határon.

Variálva a (3.36) hatást a metrikus tenzor szerint, megkapjuk, hogy $\delta s^\mu = 0$. A (3.37) kifejezést felhasználva és bevezetve a $\phi := \int \lambda_\mu(x)dx^\mu$ mennyiséget, levezethető (részletes levezetés a C.4 függelékben), hogy

$$\int_\nu d^n x e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}[R_{\mu\nu}f_R(R,T)+(g_{\mu\nu}\Box-\nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R,T)+f_R(R,T)K_{\mu\nu}-$$
$$-2g_{\mu\nu}\lambda_\beta\partial^\beta(f_R(R,T))+\lambda_\mu\partial_\nu(f_R(R,T))+\lambda_\nu\partial_\mu(f_R(R,T))+T_{\mu\nu}f_T(R,T)+\Theta_{\mu\nu}f_T(R,T)-$$
$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R,T)-\frac{F}{2}T_{\mu\nu}]=0, \tag{3.38}$$

ahol $\Theta_{\mu\nu}\equiv g^{\alpha\beta}\frac{\partial(T_{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}}$ és $T_{\mu\nu}=-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}}$, $K_{\mu\nu}:=\Lambda_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}\Lambda, \Lambda_{\mu\nu}:=\frac{1}{2}(\lambda_{\mu;\nu}+\lambda_{\nu;\mu})-\lambda_\mu\lambda_\nu\Lambda=\Lambda^\mu_\mu$;

Mivel a metrikus tenzor variációi, $\delta g^{\mu\nu}$ tetszőlegesek, a Herglotz-féle variációs elvből az $f(R,T)$ gravitáció téregyenletei a következő alakot öltik:

$$f_R(R,T)R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R,T)+(g_{\mu\nu}\Box-\nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R,T)+H_{\mu\nu}=\frac{F}{2}T_{\mu\nu}-T_{\mu\nu}f_T(R,T)-\Theta_{\mu\nu}f_T(R,T), \tag{3.39}$$

ahol a Herglotz-mező járuléka

$$H_{\mu\nu}:=f_R(R,T)K_{\mu\nu}+\lambda_\mu\partial_\nu(f_R(R,T))+\lambda_\nu\partial_\mu(f_R(R,T))-2g_{\mu\nu}\lambda_\beta\partial^\beta(f_R(R,T)), \tag{3.40}$$

$$f_R(R,T):=\frac{\partial f(R,T)}{\partial R}\ , \quad f_T(R,T):=\frac{\partial f(R,T)}{\partial T}. \tag{3.41}$$

Látható, hogy fennáll az ekvivalencia: ha a speciális esetet tekintjük, amikor $f(R,T)=R$, akkor a Herglotz-formalizmusból visszanyerjük az $f(R)$ gravitáció téregyenleteit (3.34).

Korábban említettük, hogy $f(R,T)$ gravitációban a nemminimális csatolás következtében az energia-momentum tenzor nem marad meg. Ezen problémát probáljuk meg most megoldani. Véve a (3.39) téregyenletek divergenciáját és kifejezve az energia-momentum tenzorét (részletes levezetés C.4 függelékben) a következő kifejezéshez jutunk

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}=\frac{1}{\frac{F}{2}+f_T(R,T)}\Bigg[\nabla^\mu H_{\mu\nu}-\frac{1}{2}f_T(R,T)\nabla_\nu T-\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\nabla^\mu F+(T_{\mu\nu}+\Theta_{\mu\nu})\nabla^\mu f_T(R,T)+$$
$$+f_T(R,T)\nabla_\nu\mathcal{L}_m-2g^{\alpha\beta}f_T(R,T)\nabla^\mu\frac{\partial^2\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}\Bigg]. \tag{3.42}$$

Hasonlóan, mint $f(R,T)$ gravitációban, a (3.42) egyenletből látható, hogy az energia-momentum tenzor divergenciája nem nulla. Ugyanakkor, lehetőségünk adódik, hogy olyan dinamikát írjunk elő a Herglotz-mezőnek, melynek következtében az energia-momentum tenzor megmaradás fennáll.

Kikötve, hogy $\nabla^\mu T_{\mu\nu}=0$, a Herglotz-mezőre kirrótt feltétel:

$$\begin{aligned}\nabla^\mu H_{\mu\nu}=&\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\nabla^\mu F-(T_{\mu\nu}+\Theta_{\mu\nu})\nabla^\mu f_T(R,T)+f_T(R,T)\nabla_\nu\left(\frac{1}{2}T-\mathcal{L}_m\right)\\&+2g^{\alpha\beta}f_T(R,T)\nabla^\mu\frac{\partial^2\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Tehát, amennyiben a (3.43) feltétel teljesül, $f(R,T)$ gravitációban az energia-momentum tenzor megmaradása biztosított.

3.2.4. Herglotz variációs elv $f(R,\mathcal{L}_m)$ gravitációban

A Herglotz variációs elvet $f(R,\mathcal{L}_m)$ gravitációban a következőképpen definiáljuk

$$S(\Omega) = \int_\Omega \eta_\mu s^\mu \sqrt{-h} d^{n-1}x = \int_\nu \nabla_\mu s^\mu \sqrt{-g} d^n x. \tag{3.44}$$

$$\nabla_\mu s^\mu = f(R,\mathcal{L}_m) + \lambda_\nu s^\nu, \tag{3.45}$$

kikötve peremfeltételként, hogy $g_{\alpha\beta}$ és $\partial_\sigma g_{\alpha\beta}$ rögzítettek a Ω határon.

Variálva a (3.44) hatást a metrikus tenzor szerint, megkapjuk, hogy $\delta s^\mu = 0$. A (3.45) kifejezést felhasználva és bevezetve a $\phi := \int \lambda_\mu(x) dx^\mu$ mennyiséget, levezethető (részletes levezetés C.5 függelékben található), hogy

$$\begin{aligned}&\int_\nu d^n x\, e^{-\phi} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} [R_{\mu\nu} f_R(R,\mathcal{L}_m) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu) f_R(R,\mathcal{L}_m) + f_R(R,\mathcal{L}_m) K_{\mu\nu} - \\ &- 2 g_{\mu\nu} \lambda_\beta \partial^\beta (f_R(R,\mathcal{L}_m)) + \lambda_\mu \partial_\nu (f_R(R,\mathcal{L}_m)) + \lambda_\nu \partial_\mu (f_R(R,\mathcal{L}_m)) + \frac{1}{2} f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - \\ &- \frac{1}{2} f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R,\mathcal{L}_m)] \stackrel{!}{=} 0,\end{aligned} \tag{3.46}$$

ahol

$$\begin{aligned}&f_R(R,\mathcal{L}_m) := \frac{\partial f(R,\mathcal{L}_m)}{\partial R}\ , \quad f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) := \frac{\partial f(R,\mathcal{L}_m)}{\partial \mathcal{L}_m} \\ &K_{\mu\nu} := \Lambda_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda\ , \quad \Lambda_{\mu\nu} := \frac{1}{2}(\lambda_{\mu;\nu} + \lambda_{\nu;\mu}) - \lambda_\mu\lambda_\nu \Lambda = \Lambda^\mu_\mu\ , \\ &T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}}.\end{aligned}$$

A metrikus tenzor variációi $\delta g^{\mu\nu}$ tetszőlegesek, melyből megkapjuk a Herglotz $f(R,\mathcal{L}_m)$ gravitációs téregyenleteket:

$$\begin{aligned}&f_R(R,\mathcal{L}_m) R_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu) f_R(R,\mathcal{L}_m) - \frac{1}{2}[f(R,\mathcal{L}_m) - \\ &- f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\mathcal{L}_m] g_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) T_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{3.47}$$

ahol a Herglotz-mező járuléka

$$H_{\mu\nu} := f_R(R,T) K_{\mu\nu} + \lambda_\mu \partial_\nu (f_R(R,T)) + \lambda_\nu \partial_\mu (f_R(R,T)) - 2 g_{\mu\nu} \lambda_\beta \partial^\beta (f_R(R,T)).$$

Az eredményünk ellenőrzésére, tekintsük azt az esetet, amikor $f(R,\mathcal{L}_m) = f(R) + F\mathcal{L}_m$.

Behelyettesítve a (3.47) kifejezésbe

$$\begin{aligned} f'(R)R_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) - \frac{1}{2}[f(R) + F\mathcal{L}_m - F\mathcal{L}_m] + H_{\mu\nu} &= \frac{F}{2}T_{\mu\nu} \\ f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) + H_{\mu\nu} &= \frac{F}{2}T_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{3.48}$$

mely megegyezik a korábbi alfejezetben kapott $f(R)$ gravitáció téregyenleteivel Herglotz-fomalizmusban (3.34).

Az $f(R,\mathcal{L}_m)$ gravitáció fejezetben láthattuk, hogy a nemminimális csatolás következtében, az anyag és geometria között, az energia-momentum tenzor nemmegmaradó mennyiség. Vegyük a (3.47) téregyenletek divergenciáját. Számítások után (részletes levezetéshez lásd a C.5 függeléket) arra jutunk, hogy

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{2}{f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)}\left[\frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - T_{\mu\nu})\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) + \nabla^\mu H_{\mu\nu}\right]. \tag{3.49}$$

Az előző alfejezethez hasonlóan most is lehetőségünk adódik, hogy olyan dinamikát definiáljunk a Herglotz-mezőnek, melynek következtében az energia-momentum tenzor megmaradása fennáll. Kikötve, hogy $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, a Herglotz-mező dinamikáját leíró feltétel

$$\nabla^\mu H_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m)\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m). \tag{3.50}$$

4. Következtetések

Összegezve munkánkat, a disszipatív gravitációs elméletek leírására alkalmaztuk a Herglotz-variációs elvet, mely a klasszikus variációs elv kiterjesztése. Először áttekintettük az általános relativitáselmélet és egyes módosított gravitációs elméletek ($f(R), f(R,T), f(R,\mathcal{L}_m)$) alapjait, levezettük a téregyenleteket, különös figyelmet fordítva az energia-momentum tenzor megmaradásának kérdésére. Rámutattunk, hogy anyag-geometria közötti nemminimális csatolás esetén az energia-momentum tenzor nem marad meg kovariáns módon, amely több problémát is felvet. A legkomolyabb probléma az, hogy több gravitációs elméletre is ki lett mutatva, hogy a nemkonzervativitás mértéke komoly korlátoknak van kitéve [11],[12] szinte elhanyagolható. Továbbá, $f(R,T)$ elméletek esetén, specifikus $f(R,T) = f_1(R) + f_2(T)$ alakokra, ahol f_1, f_2 függvények, az elméletek nem kompatibilisek a késői univerzum mérési adataival, amennyiben $f_2 \neq 0$. Emellett felmerül a konceptuális kérdés is, hogy mi történik az energiával, ha az nem marad meg kovariáns módon. Egy lehetséges értelmezés szerint a nyílt rendszerek termodinamikájára hivatkozva az energiát a gravitációs szektorból az anyag szektorba történő áramlásként lehet felfogni, amely részecskék keletkezéséhez vagy annihilációjához vezethet. Ezen részecskék eredete azonban nem határozható meg, csak kvantumtérelméleti módszerek által.

Ezen problémára áthidalására javasoltuk a Herglotz-variációs elv alkalmazását, mely által kikerülhettük a kvantumtérelméleti bonyodalmakat. Bemutattuk a Herglotz-formalizmust alkalmazását klasszikus fizikában, majd általánosítva mezőkre alkalmaztuk gravitációelméletekben is.

Kiemelt eredményünk, hogy megfelelő dinamikai feltételek kikötésével a Herglotz-mezőre biztosítani tudjuk az energia-momentum tenzor megmaradását még olyan gravitációs elméletekben, ahol az alapból nem lenne megmaradó. Ezáltal sikerült egy konzisztens, klasszikus keretű leírást adnunk az ilyen jellegű rendszerekre, amely a disszipatív jelleg mellett megőrzi a fizikai törvények alapvető szimmetriáit.

A dolgozatban bemutatott formalizmus további kutatási irányok felé is megnyitja az utat. Az egyik fontos lehetőség a téregyenleteink kiértékelése specifikus metrikában, és a megfigyelési adatokhoz való hasonlítás. Egy nagyon érdekes nyitott kérdés az, hogy a Herglotz mező kontribúciói korrigálni tudják-e a rossz $f(R,T)$ additív modelleket. Wazny, Csillag és kollaborátorai kimutatták egy publikálás alatt levő cikkben[29], hogy ez az $f(R,T) = R + \alpha T$ típusú modellek esetén lehetséges. Nyitott kérdés marad azonban az, hogy más modellekre, amelyek additívak, és megjelennek a [11] dolgozatban, ez megvalósítható-e, vagy sem. Amennyiben igen, ez azt jelenti, hogy a Herglotz mező korrekciói rossz modelleket javítani képes, és ugyanakkor a sötét energiának egy geometriai értelmet adhat. Továbbá, egy érdekes kérdés az is, hogy léteznek-e szférikus szimmetriában analitikus megoldásai a téregyenleteknek, és ha ezek megmagyarázhatjak-e a sötét anyagot, a Herglotz mező által.

Egy következő lehetőség, hogy alkalmazzuk a Herglotz-elvet más geometriákra, ahol a standard Levi-Civita kovariáns deriváltat felváltják általánosabb kovariáns deriváltak. Ilyen irányba már megkezdtük a munkát, tekintve egy olyan geometriát, melyben megjelenik egy általános vektoriális non-metricitás.

Legvégül, de nem utolsó sorban, egy érdekes kutatási terület a Herglotz elv alkalmazása kvantumos rendszerekre [30][31], amelyek disszipatívak. Sejtésünk szerint ez egy Lindblad-típusú egyenlethez fog vezetni, de ez még folyamatban levő munka. Bár matematikusok a Herglotz-formalizmus segítségével absztrakt módon vizsgálták a disszipáció jelenségét kvantummechanikában, a használt nyelvezet a fizikusok számára nehezen érthető. Ezt fogjuk próbálni a jövőben elérhetőbbé tenni, hasonlóan, mint a gravitációelméletekhez való hozzájárulásunkkal.

Függelék

A. Azonosságok a relativitáselméletben

A.1. A metrikus tenzor determinánsának differenciálja

Kezdjük először a (1.12) összefüggés bizonyításával. A metrikus tenzor determinánsának g differenciálja a következő módon határozható meg: Vegyük a metrikus tenzor $g_{\mu\nu}$ komponenseinek differenciálját, majd szorozzuk meg az adott komponenshez tartozó $A^{\mu\nu}$ minorral

$$dg = A^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}. \tag{A.1}$$

Ezáltal megkaptuk, hogy a $g_{\mu\nu}$ komponenshez tartozó minor az alábbi összefüggéssel számolható

$$A^{\mu\nu} = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}. \tag{A.2}$$

Lineáris algebrából tudjuk, hogy a metrikus tenzor $g_{\mu\nu}$ recikprához tartozó $g^{\mu\nu}$ tenzor komponensei a következő módon adhatók meg: meghatározzuk a $g_{\mu\nu}$ komponenshez tartozó minorokat, majd elosztjuk a metrikus tenzor determinánsával:

$$g^{\mu\nu} = \frac{A^{\mu\nu}}{g}. \tag{A.3}$$

Felhasználva a kapott eredményünket, az (A.1) összefüggés átírható, mint

$$dg = g \cdot g^{\mu\nu} \cdot dg_{\mu\nu}. \tag{A.4}$$

Továbbiakban használjuk fel, hogy

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\mu}. \tag{A.5}$$

Differenciálva az egyenletet

$$g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} = 0 \tag{A.6}$$

$$g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} \tag{A.7}$$

Behelyettesítve a (A.4) kifejezésbe

$$dg = -g \cdot g_{\mu\nu} \cdot dg^{\mu\nu}, \tag{A.8}$$

mely a bizonyítandó összefüggésünk volt.

A.2. A Palatini-azonosság

A (1.14) összefüggés bizonyítása a következő. A Riemann-tenzor definíciója

$$R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu} := \frac{\partial \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\tau}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\tau} - \Gamma^{\tau}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\tau}. \tag{A.9}$$

Vegyük a Riemann-tenzor variációját

$$\delta R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu})}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu})}{\partial x^{\nu}} + (\delta\Gamma^{\tau}{}_{\nu\lambda})\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\tau} + \Gamma^{\tau}{}_{\nu\lambda}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\tau}) - (\delta\Gamma^{\tau}{}_{\mu\lambda})\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\tau} - \Gamma^{\tau}{}_{\mu\lambda}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\tau}) \tag{A.10}$$

A Christoffel-szimbólumok általános transzformációjából tudjuk, hogy a Christoffel-szimbólumok variációja egy tenzor. Ezáltal értelmezzük a kovariáns deriváltját

$$\nabla_{\mu}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}) = \partial_{\mu}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}) + \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\tau}\delta\Gamma^{\tau}{}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\tau}{}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\tau\nu} - \Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\tau} \tag{A.11}$$

$$\nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}) = \partial_{\nu}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}) + \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\tau}\delta\Gamma^{\tau}{}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\tau}{}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\tau\mu} - \Gamma^{\tau}{}_{\nu\mu}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\tau}. \tag{A.12}$$

Kivonva egymásból a két kovariáns deriváltat

$$\nabla_{\mu}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}) = \frac{\partial(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu})}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu})}{\partial x^{\nu}} + (\delta\Gamma^{\tau}{}_{\nu\lambda})\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\tau} + \Gamma^{\tau}{}_{\nu\lambda}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\tau}) - (\delta\Gamma^{\tau}{}_{\mu\lambda})\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\tau} - \Gamma^{\tau}{}_{\mu\lambda}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\tau}), \tag{A.13}$$

ahol felhasználtuk, hogy a Christoffel-szimbólumok szimmetrikusak az alsó indexeire.

Láthatjuk, hogy a (A.10) és (A.13) összefüggések jobb oldala megegyezik, ezáltal tranzitivitás révén megkapjuk, hogy

$$\delta R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu} = \nabla_{\mu}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu)} - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}). \tag{A.14}$$

Kontraktálva a fenti összefüggést ($\sigma = \mu$), megkapjuk a Palatini-azonosságot

$$\delta R_{\lambda\nu} = \nabla_{\sigma}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma}). \tag{A.15}$$

A.3. Az Einstein-tenzor divergenciája

Az Einstein-tenzor divergenciájának a meghatározásához szükségünk van az ún. Bianchi-azonossára. A Bianchi-azonosság levezetése lesz a következőkben bemutatva.

A téridő minden P pontjában létezik egy olyan koordinátarendszer, amelyben teljesül, hogy $\partial_\sigma g_{\mu\nu}|_P = 0$, ezáltal fennáll a hozzá tartozó Christoffel szimbólumokra, hogy $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}|_P = 0$. Fontos megjegyezni viszont, hogy ez csak arra a P pontra érvényes, és a környezetére nem. Ebben a rendszerben a Riemann-tenzor az alábbi alakot ölti

$$R^n{}_{ikl}|_P = \partial_k \Gamma^n{}_{il} - \partial_l \Gamma^n{}_{ik}, \tag{A.16}$$

mivel a sima Γ tagok kiesnek (lásd eredeti alakját az A.2 függelékben).

Ciklikusan permutálva az m, k, l indexeket

$$R^n{}_{imk}|_P = \partial_m \Gamma^n{}_{ik} - \partial_k \Gamma^n{}_{im} \tag{A.17}$$

$$R^n{}_{ilm}|_P = \partial_l \Gamma^n{}_{im} - \partial_m \Gamma^n{}_{il}. \tag{A.18}$$

Vegyük ezen összefüggések parciális deriváltjait és adjuk össze őket

$$\begin{aligned}
\partial_m R^n{}_{ikl} + \partial_l R^n{}_{imk} + \partial_k R^n{}_{ilm} &= \partial_m(\partial_k \Gamma^n{}_{il} - \partial_l \Gamma^n{}_{ik}) + \partial_l(\partial_m \Gamma^n{}_{ik} - \partial_k \Gamma^n{}_{im}) + \partial_k(\partial_l \Gamma^n{}_{im} - \partial_m \Gamma^n{}_{il}) \\
&= {\color{red}\partial_m \partial_k \Gamma^n{}_{il}} - {\color{blue}\partial_m \partial_l \Gamma^n{}_{ik}} + {\color{blue}\partial_l \partial_m \Gamma^n{}_{ik}} - {\color{green}\partial_l \partial_k \Gamma^n{}_{im}} + {\color{green}\partial_k \partial_l \Gamma^n{}_{im}} - {\color{red}\partial_k \partial_m \Gamma^n{}_{il}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mivel egy lokálisan geodetikus koordinátarendszerben vagyunk, az eredményt általánosítani kell. A parciális deriváltakat kovariáns deriváltakkal helyettesítve, megkapjuk a Bianchi-azonosságot általános koordinátarendszerben

$$\nabla_m R^n{}_{ikl} + \nabla_l R^n{}_{imk} + \nabla_k R^n{}_{ilm} = 0. \tag{A.19}$$

Hogy maradjunk konzisztensek a jelöléseinkkel, írjuk át a fenti összefüggést

$$\nabla_\rho R^\sigma{}_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\nu R^\sigma{}_{\lambda\rho\mu} + \nabla_\mu R^\sigma{}_{\lambda\nu\rho} = 0. \tag{A.20}$$

Kontraktálva ($\sigma = \nu$)

$$-\nabla_\rho R_{\lambda\mu} + \nabla_\sigma R^\sigma{}_{\lambda\rho\mu} + \nabla_\mu R_{\lambda\rho} = 0. \tag{A.21}$$

Megszorozzuk az egyenletet a metrikus tenzor inverzével $g^{\lambda\alpha}$

$$-g^{\lambda\alpha}\nabla_\rho R_{\lambda\mu} + g^{\lambda\alpha}\nabla_\sigma R^\sigma{}_{\lambda\rho\mu} + g^{\lambda\alpha}\nabla_\mu R_{\lambda\rho} = 0 \tag{A.22}$$

$$-\nabla_\rho(g^{\lambda\alpha}R_{\lambda\mu}) + \nabla_\sigma(g^{\lambda\alpha}R^\sigma{}_{\lambda\rho\mu}) + \nabla_\mu(g^{\lambda\alpha}R_{\lambda\rho}) = 0 \tag{A.23}$$

$$-\nabla_\rho R^\alpha_\mu + \nabla_\sigma(g^{\lambda\alpha}R^\sigma{}_{\lambda\rho\mu}) + \nabla_\mu R^\alpha_\rho = 0, \tag{A.24}$$

ahol felhasználtuk, hogy a metrikus tenzor kovariáns deriváltja nulla.

Tovább kontraktálva az egyenletet ($\rho = \alpha$)

$$-\nabla_\rho R^\rho_\mu + \nabla_\sigma(g^{\lambda\rho}R^\sigma{}_{\lambda\rho\mu}) + \nabla_\mu R^\rho_\rho = 0 \tag{A.25}$$

$$-\nabla_\rho R^\rho_\mu - \nabla_\sigma R^\sigma_\mu + \nabla_\mu R = 0. \tag{A.26}$$

Az első két tagot egybe tudjunk ejteni, mivel csak egy szummázási tagban különböznek

$$-2\nabla_\rho R^\rho_\mu + \nabla_\mu R = 0 \tag{A.27}$$

$$-2\nabla_\rho R^\rho_\mu + \nabla_\rho R\delta^\rho_\mu = 0 \tag{A.28}$$

$$\nabla_\rho\left(\underbrace{R^\rho_\mu - \frac{1}{2}R\delta^\rho_\mu}_{:=G^\rho_\mu}\right) = 0 \tag{A.29}$$

$$\nabla_\rho G^\rho_\mu = 0. \tag{A.30}$$

Átírhatjuk a következő alakba, megkapva, hogy az Einstein-tenzor divergenciája nulla

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \tag{A.31}$$

B. Kiegészítés módosított gravitációs elméletekhez

B.1. $f(R)$ gravitáció

Továbbiakban levezetjük a (2.4) Ricci skalár variációjának képletét. A Ricci skalár variációja a következőképpen írható fel

$$\delta R = \delta(R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}) = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\nabla_\rho\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}), \tag{B.1}$$

ahol felhasználtuk a Palatini-azonosságot(lásd A.2 függelék).

Idézzük fel a Christoffel-szimbólumok definícióját

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\mu}). \tag{B.2}$$

Most pedig vegyük a variációját a Christoffel-szimbólumoknak

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\delta g^{\lambda\alpha})(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}(\partial_\mu \delta g_{\alpha\nu} + \partial_\nu \delta g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha \delta g_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}(\delta g^{\lambda\alpha})(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}[(\partial_\mu \delta g_{\alpha\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha}\delta g_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta g_{\alpha\sigma}) \\
&\quad + (\partial_\nu \delta g_{\alpha\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}\delta g_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta g_{\alpha\sigma}) - (\partial_\alpha \delta g_{\mu\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu}\delta g_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\delta g_{\mu\sigma}) + 2\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta g_{\alpha\sigma}] \\
&= \frac{1}{2}(\delta g^{\lambda\alpha})(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}(\nabla_\mu \delta g_{\alpha\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\mu}) + g^{\lambda\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta g_{\alpha\sigma}.
\end{aligned}$$

A következőkben az egyenlet utolsó tagját vizsgáljuk meg részletesebben

$$\begin{aligned}
g^{\lambda\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta g_{\alpha\sigma} &= g^{\lambda\alpha}\delta g_{\alpha\sigma}\frac{1}{2} g^{\sigma\alpha}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} g_{\alpha\sigma}\delta g^{\alpha\sigma}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\sigma}\delta g^{\alpha\sigma}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{2}\delta g^{\lambda\alpha}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}),
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$(lásd A.1 függelék).

Behelyettesítve az eredményünket a Christoffel-szimbólumok variációjában, majd néhány egyszerűsítés után megkapjuk, hogy

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}(\nabla_\mu \delta g_{\alpha\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\mu}). \tag{B.3}$$

Ismerve a Christoffel-szimbólumok variációját, kiszámolhatjuk ezek kovariáns deriváltját

$$\begin{aligned}
\nabla_\rho \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\rho\alpha}\nabla_\rho(\nabla_\mu \delta g_{\alpha\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}\nabla^\alpha(\nabla_\mu \delta g_{\alpha\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}(\nabla^\alpha\nabla_\mu \delta g_{\alpha\nu} + \nabla^\alpha\nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} - \nabla^\alpha\nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_\nu \delta \Gamma^{\rho}{}_{\rho\mu} &= \frac{1}{2} g^{\rho\nu} \nabla_\nu (\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\rho \delta g_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta g_{\rho\mu}) \\
&= \frac{1}{2} \nabla^\rho (\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\rho \delta g_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta g_{\rho\mu}) \\
&= \frac{1}{2} (\nabla^\rho \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla^\rho \nabla_\rho \delta g_{\nu\mu} - \nabla^\rho \nabla_\nu \delta g_{\rho\mu}).
\end{aligned}
$$

Visszahelyettesítve a (B.1) kifejezésbe, megkapjuk a Ricci skalár variációját

$$
\begin{aligned}
\delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\nabla^\alpha \nabla_\mu \delta g_{\alpha\nu} + \nabla^\alpha \nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} - \nabla^\alpha \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu} - \nabla^\rho \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} - \nabla^\rho \nabla_\rho \delta g_{\nu\mu} + \nabla^\rho \nabla_\nu \delta g_{\rho\mu}] \\
&= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} \\
&= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \nabla^\alpha \nabla_\alpha (g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) + g^{\mu\nu} g^{\alpha\mu} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} \\
&= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} g_{\alpha\mu} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\alpha\mu} \\
&= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} - \delta^\nu_\alpha \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\alpha\mu} \\
&= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

Tehát, megkaptuk végeredményként, hogy

$$
\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Box \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}, \tag{B.4}
$$

ahol $\Box \equiv \nabla_\alpha \nabla^\alpha$.

Továbbiakban a (2.8) gravitációs hatás variációjának végleges képletét bizonyítjuk. Induljunk ki abból, hogy

$$
\delta S_g = \frac{1}{16\pi G} \int \left[f^{'}(R) R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} f(R) + f^{'}(R) g_{\mu\nu} \Box \delta g^{\mu\nu} - f^{'}(R) \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} d^4 x. \tag{B.5}
$$

Az integrálban megjelenő egyes tagokat átírhatjuk a következőképpen

- $f^{'}(R) g_{\mu\nu} \Box \delta g^{\mu\nu} = f^{'}(R) g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \delta g^{\mu\nu} = \nabla_\alpha (f^{'}(R) g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \delta g^{\mu\nu}) - (g_{\mu\nu} \nabla_\alpha f^{'}(R)) \nabla^\alpha \delta g^{\mu\nu}$
- $(g_{\mu\nu} \nabla_\alpha f^{'}(R)) \nabla^\alpha \delta g^{\mu\nu} = \nabla^\alpha (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha f^{'}(R)) - \delta g^{\mu\nu} (g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla_\alpha f^{'}(R))$

$\rightarrow f^{'}(R) g_{\mu\nu} \Box \delta g^{\mu\nu} = \nabla_\alpha (f^{'}(R) g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \delta g^{\mu\nu}) - \nabla^\alpha (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha f^{'}(R)) + \delta g^{\mu\nu} (g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla_\alpha f^{'}(R))$

- $f^{'}(R) \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} = \nabla_\mu (f^{'}(R) \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}) - (\nabla_\nu \delta g^{\mu\nu})(\nabla_\mu f^{'}(R))$
- $(\nabla_\nu \delta g^{\mu\nu})(\nabla_\mu f^{'}(R)) = \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu f^{'}(R)) - \delta g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu f^{'}(R))$

$\rightarrow f^{'}(R) \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} = \nabla_\mu (f^{'}(R) \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu f^{'}(R)) + \delta g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu f^{'}(R)).$

Behelyettesítve az integrálba és elhanyagolva a teljes deriváltakat, megkapjuk a keresett összefüggésünket

$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi G}\int \left[f^{'}(R)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R) + \delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\Box f^{'}(R) - \delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu f^{'}(R)\right]\sqrt{-g}d^4x$$
$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi G}\int \left[f^{'}(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f^{'}(R)\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x. \tag{B.6}$$

Utolsó lépésként pedig bizonyítsuk be a (2.13) kifejezést, azaz az energia-momentum megmaradását. Induljunk ki a téregyenletekre vett divergenciájából

$$\nabla^\mu\left[f^{'}(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)f^{'}(R)\right] = 8\pi G\nabla^\mu T_{\mu\nu}. \tag{B.7}$$

Vizsgáljuk meg az egyenlet bal oldalát

$$\begin{aligned}
&\nabla^\mu\left[f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R)\right]\\
=&f'(R)\nabla^\mu R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f'(R) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\mu f(R) + g_{\mu\nu}\nabla^\mu\Box f'(R) - \nabla^\mu\nabla_\mu\nabla_\nu f'(R)\\
=&f'(R)\nabla^\mu R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f'(R) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f'(R,T)\nabla^\mu R + \nabla_\nu\Box f'(R) - \Box\nabla_\nu f'(R)\\
=&f'(R)\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f'(R) + (\nabla_\nu\Box - \Box\nabla_\nu)f'(R)\\
=&f'(R)\nabla^\mu G_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f'(R) - R_{\mu\nu}\nabla^\mu f'(R) = 0,
\end{aligned} \tag{B.8}$$

ahol felhasználtuk, hogy az Einstein-tenzor divergenciája nulla (lásd A.3 függelék), illetve a $\nabla_\nu\Box - \Box\nabla_\nu = -R_{\mu\nu}\nabla^\mu$ összefüggést, melyet most nem bizonyítunk.

Behelyettesítve eredményünket a téregyenletekre vett divergenciára, megkapjuk, hogy

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \tag{B.9}$$

B.2. $f(R,T)$ gravitáció

Bemutatjuk, hogy $f(R,T)$ gravitációban speciális esetben visszakapjuk az $f(R)$ gravitáció téregyenleteit. Idézzük fel az $f(R,T)$ gravitáció téregyenleteit

$$f_R(R,T)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R,T)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R,T) = 8\pi T_{\mu\nu} - f_T(R,T)T_{\mu\nu} - f_T(R,T)\Theta_{\mu\nu}, \tag{B.10}$$

ahol $\Theta_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta}\frac{\partial(T_{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}}$.

Vegyük azt a speciális esetet, hogy $f(R,T) = f(R)$. Ezáltal a téregyenlet a következőképpen alakul

$$f_R(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R) = 8\pi T_{\mu\nu} \underbrace{- f_T(R,T)T_{\mu\nu} - f_T(R,T)\Theta_{\mu\nu}}_{=0} \quad \text{(B.11)}$$

$$f_R(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R) = 8\pi T_{\mu\nu} \quad \text{(B.12)}$$

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)f'(R) = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad \text{(B.13)}$$

mely eredmény megegyezik az $f(R)$ gravitáció téregyenleteivel (2.11).

Továbbiakban bizonyítsuk be, hogy $f(R,T)$ gravitációban az energia-momentum tenzor nem marad meg (2.21). Induljunk ki a téregyenletekre vett divergenciából

$$\nabla^\mu \left[f_R(R,T)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R,T) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R,T) \right] = \nabla^\mu \left[8\pi T_{\mu\nu} - \right.$$
$$\left. - T_{\mu\nu}f_T(R,T) - \Theta_{\mu\nu}f_T(R,T) \right]. \quad \text{(B.14)}$$

Kezdjük az egyenlet bal oldalának vizsgálatával

$$\begin{aligned}
&\nabla^\mu \left[f_R(R,T)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R,T) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R,T) \right] \\
=& f_R(R,T)\nabla^\mu R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,T) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\mu f(R,T) + g_{\mu\nu}\nabla^\mu\Box f_R(R,T) - \\
&- \nabla^\mu\nabla_\mu\nabla_\nu f_R(R,T) \\
=& f_R(R,T)\nabla^\mu R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,T) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_R(R,T)\nabla^\mu R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_T(R,T)\nabla^\mu T + \\
&+ \nabla_\nu\Box f_R(R,T) - \Box\nabla_\nu f_R(R,T) \\
=& f_R(R,T)\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,T) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_T(R,T)\nabla^\mu T + \\
&+ (\nabla_\nu\Box - \Box\nabla_\nu)f_R(R,T) \\
=& f_R(R,T)\nabla^\mu G_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,T) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_T(R,T)\nabla^\mu T - R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,T) \\
=& - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_T(R,T)\nabla^\mu T,
\end{aligned} \quad \text{(B.15)}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ (lásd A.3 függelék) és $\nabla_\nu\Box - \Box\nabla_\nu = -R_{\mu\nu}\nabla^\mu$.

Vegyük most a téregyenletekre vett divergenciának jobb oldalát

$$
\begin{aligned}
&\nabla^\mu \left[8\pi T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} f_T(R,T) - \Theta_{\mu\nu} f_T(R,T)\right] \\
=&8\pi \nabla^\mu T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}\nabla^\mu f_T(R,T) - f_T(R,T)\nabla^\mu T_{\mu\nu} - \Theta_{\mu\nu}\nabla^\mu f_T(R,T) - f_T(R,T)\nabla^\mu \Theta_{\mu\nu} \\
=&\left(\nabla^\mu T_{\mu\nu}\right)\left(8\pi - f_T(R,T)\right) - T_{\mu\nu}\nabla^\mu f_T(R,T) - \Theta_{\mu\nu}\nabla^\mu f_T(R,T) - f_T(R,T)\nabla^\mu \Theta_{\mu\nu} \\
=&\left(\nabla^\mu T_{\mu\nu}\right)\left(8\pi - f_T(R,T)\right) - T_{\mu\nu}\nabla^\mu f_T(R,T) - \Theta_{\mu\nu}\nabla^\mu f_T(R,T) - \\
&- f_T(R,T)\nabla^\mu \left(-2T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - 2g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}\right) \\
=&\left(\nabla^\mu T_{\mu\nu}\right)\left(8\pi + f_T(R,T)\right) - \left(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}\right)\nabla^\mu f_T(R,T) - f_T(R,T)\nabla_\nu \mathcal{L}_m + \\
&+ 2g^{\alpha\beta} f_T(R,T)\nabla^\mu \frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}},
\end{aligned}
\tag{B.16}
$$

ahol felhasználtuk a $\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - 2g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}$ összefüggést.

Behelyettesítve eredményeinket a (B.14) kifejezésbe

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f_T(R,T)\nabla^\mu T = \left(\nabla^\mu T_{\mu\nu}\right)\left(8\pi + f_T(R,T)\right) - \\
&- \left(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}\right)\nabla^\mu f_T(R,T) - f_T(R,T)\nabla_\nu \mathcal{L}_m + 2g^{\alpha\beta} f_T(R,T)\nabla^\mu \frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}.
\end{aligned}
\tag{B.17}
$$

Kifejezve az energia-momentum tenzor divergenciáját

$$
\begin{aligned}
\nabla^\mu T_{\mu\nu} =& \frac{1}{8\pi + f_T(R,T)}\left[-\frac{1}{2} f_T(R,T)\nabla_\nu T + \left(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}\right)\nabla^\mu f_T(R,T) + \right. \\
&\left. + f_T(R,T)\nabla_\nu \mathcal{L}_m - 2g^{\alpha\beta} f_T(R,T)\nabla^\mu \frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}\right],
\end{aligned}
\tag{B.18}
$$

ahonnan láthatjuk, hogy $f(R,T)$ gravitációban $\nabla^\mu T_{\mu\nu} \neq 0$.

B.3. $f(R, \mathcal{L}_m)$ gravitáció

Továbbiakban levezetjük az anyagot jellemző Lagrange-sűrűség metrikus tenzor szerinti parciális deriváltját. Vegyük az energia-momentum definícióját

$$
T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}} \tag{B.19}
$$

$$
= -2\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - 2\frac{\mathcal{L}_m}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}. \tag{B.20}
$$

A második tagot a kifejezésben átírhatjuk a következőképpen

$$
\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{-g_{\mu\nu}}{2}, \tag{B.21}
$$

ahol felhasználtuk $dg = -g \cdot g_{\mu\nu} \cdot dg^{\mu\nu}$ (lásd A.1 függelék).

Behelyettesítve, megkapjuk

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} =& -2\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - 2\mathcal{L}_m \frac{-g_{\mu\nu}}{2} \\ =& g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - 2\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}. \end{aligned} \tag{B.22}$$

Kifejezve az anyagot jellemző Lagrange-sűrűség metrikus tenzor szerinti parciális deriváltját megkapjuk a keresett összefüggésünket

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - \frac{1}{2}T_{\mu\nu}. \tag{B.23}$$

Hátramaradt, hogy igazoljuk a correspondenciát, hogy speciális esetben visszakapjuk az $f(R)$ gravitáció téregyenleteit. Idézzük fel az $f(R, \mathcal{L}_m)$ gravitáció téregyenleteit

$$\begin{aligned} &R_{\mu\nu} f_R(R, \mathcal{L}_m) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu) f_R(R, \mathcal{L}_m) - \frac{1}{2}[f(R, \mathcal{L}_m) - \\ &- f_{\mathcal{L}_m}(R, \mathcal{L}_m)\mathcal{L}_m] g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} f_{\mathcal{L}_m}(R, \mathcal{L}_m) T_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{B.24}$$

Vegyük a speciális esetet, hogy $f(R, \mathcal{L}_m) = f(R)/2 + \mathcal{L}_m$. Ezáltal a téregyenlet a következőképpen fog kinézni

$$\begin{aligned} &R_{\mu\nu}\frac{d}{dR}(f(R)/2 + \mathcal{L}_m) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)\frac{d}{dR}(f(R)/2 + \mathcal{L}_m) - \frac{1}{2}[f(R)/2 + \mathcal{L}_m - \\ &- \frac{d}{d\mathcal{L}_m}(f(R)/2 + \mathcal{L}_m)\mathcal{L}_m] g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\mathcal{L}_m}(f(R)/2 + \mathcal{L}_m) T_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{B.25}$$

$$R_{\mu\nu} f'(R)/2 + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu) f'(R)/2 - \frac{1}{2}[f(R)/2 + \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_m] = \frac{1}{2}T_{\mu\nu} \tag{B.26}$$

$$R_{\mu\nu} f'(R) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu) f'(R) - \frac{1}{2}f(R) = T_{\mu\nu} \tag{B.27}$$

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R) - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box) f'(R) = T_{\mu\nu}, \tag{B.28}$$

mely eredmény megegyezik az $f(R)$ gravitáció téregyenleteivel (2.11).

Ami hátramaradt, hogy igazoljuk $f(R, \mathcal{L}_m)$ gravitációban az energia-momemtum tenzor nemmegmaradását (2.28). Induljunk ki a téregyenletekre vett divergenciából

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \Big[&R_{\mu\nu} f_R(R, \mathcal{L}_m) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu) f_R(R, \mathcal{L}_m) - \frac{1}{2}[f(R, \mathcal{L}_m) - \\ &- f_{\mathcal{L}_m}(R, \mathcal{L}_m)\mathcal{L}_m] g_{\mu\nu} \Big] = \frac{1}{2}\nabla^\mu \left[f_{\mathcal{L}_m}(R, \mathcal{L}_m) T_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \tag{B.29}$$

Tekintsük először az egyenlet bal oldalát

$$
\begin{aligned}
&f_R(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu R_{\mu\nu}+R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,\mathcal{L}_m)+(\nabla^\mu g_{\mu\nu}\Box-\nabla^\mu\nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R,\mathcal{L}_m)-\\
&-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\mu f(R,\mathcal{L}_m)+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu\mathcal{L}_m+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\\
=&f_R(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu R_{\mu\nu}+R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,\mathcal{L}_m)+(\nabla_\nu\Box-\Box\nabla_\nu)f_R(R,\mathcal{L}_m)-\\
&-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_R(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu R-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu\mathcal{L}_m+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu\mathcal{L}_m+\\
&+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\\
=&f_R(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)+R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,\mathcal{L}_m)-R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,\mathcal{L}_m)+\\
&+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\\
=&f_R(R,\mathcal{L}_m)\underbrace{\nabla^\mu\left(G_{\mu\nu}\right)}_{=0}+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\\
=&\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m),
\end{aligned}
\tag{B.30}
$$

ahol felhasználtuk, hogy $\nabla^\mu G_{\mu\nu}=0$ (lásd A.3 függelék) és $\nabla_\nu\Box-\Box\nabla_\nu=-R_{\mu\nu}\nabla^\mu$.

Behelyettesítve a téregyenletekre vett divergenciára

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)=\frac{1}{2}f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu T_{\mu\nu}+\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\\
&\frac{1}{2}f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m-T_{\mu\nu})\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m).
\end{aligned}
\tag{B.31}
$$

Kifejezve az energia-momentum divergenciáját

$$
\nabla^\mu T_{\mu\nu}=\frac{2}{f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)}\left[\frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m-T_{\mu\nu})\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\right],
\tag{B.32}
$$

melyből láthatjuk, hogy $f(R,\mathcal{L}_m)$ gravitációban az energia-momentum tenzor nem marad meg

$$
\nabla^\mu T_{\mu\nu}\neq 0.
\tag{B.33}
$$

C. Kiegészítés a Herglotz variációs elvhez

C.1. Herglotz variációs elv a klasszikus fizikában

Vezessük le az általánosított Euler-Lagrange egyenleteket. Induljunk ki a hatáselvből

$$\dot{S} = L\left(q(t), \dot{q}(t), S, t\right). \tag{C.1}$$

Véve a fenti összefüggés variációját

$$\delta\dot{S} = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial S}\delta S. \tag{C.2}$$

Vezessük be a következő skalármennyiséget

$$\lambda := \int \frac{\partial L}{\partial S} dt. \tag{C.3}$$

Használva a bevezetett mennyiségünket, a (C.2) kifejezés átírható

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda}\delta S) = e^{-\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right). \tag{C.4}$$

Kikötve, hogy $\delta S \stackrel{!}{=} 0$, megkapjuk az általánosított Euler-Lagrange egyenleteket

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial S}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{C.5}$$

C.2. Herglotz variációs elv a relativitáselméletben

Kezdjük a (3.22) összefüggés bizonyításával. Induljunk ki a (3.20) egyenletből.

$$s^{\mu}_{;\mu} = F(x)\mathcal{L}_m + R + \lambda_\nu s^\nu. \tag{C.6}$$

Ezt átírhatjuk, felhasználva, hogy $\nabla_\mu(.)\sqrt{-g} = \partial_\mu(.\sqrt{-g})$

$$(s^\mu\sqrt{-g})_{,\mu} = \sqrt{-g}(F(x)\mathcal{L}_m + R + \lambda_\mu s^\mu). \tag{C.7}$$

Variálva a fenti kifejezést a metrikus tenzor szerint

$$\delta[(s^\mu\sqrt{-g})_{,\mu}] = \delta(\sqrt{-g}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}F(x)\mathcal{L}_m) + \delta(\sqrt{-g}\lambda_\mu s^\mu) \tag{C.8}$$

$$= \delta(\sqrt{-g}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}F(x)\mathcal{L}_m) + \lambda_\mu\delta(\sqrt{-g}s^\mu) + \sqrt{-g}s^\mu \underbrace{\delta(\lambda_\mu)}_{=0} \tag{C.9}$$

$$= \delta(R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g} + F(x)\mathcal{L}_m\sqrt{-g}) + \lambda_\mu\delta(\sqrt{-g}s^\mu). \tag{C.10}$$

Bevezetve a $\phi := \int \lambda_\mu(x)dx^\mu$ mennyiséget

$$[\delta(s^\mu\sqrt{-g})e^{-\phi}]_{,\mu} = e^{-\phi}\delta(R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g} + F(x)\mathcal{L}_m\sqrt{-g}), \tag{C.11}$$

mely a bizonyítandó összefüggésünk volt.

Továbbiakban bizonyítsuk be, hogy az egyenlet bal oldala nulla

$$\int_\nu [\delta(s^\mu\sqrt{-g})e^{-\phi}]_{,\mu}d^nx = \int_\nu [e^{-\phi}(\sqrt{-g}\delta s^\mu + s^\mu\delta\sqrt{-g})]_{,\mu}d^nx \tag{C.12}$$

$$= \int_\nu [e^{-\phi}(\sqrt{-g}\delta s^\mu - \frac{s^\mu}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu})]_{,\mu}d^nx \tag{C.13}$$

$$\overset{\textbf{Stokes th.}}{=} \int_\Omega \eta_\mu e^{-\phi}\sqrt{h}(\underbrace{\delta s^\mu}_{=0} - \frac{s^\mu}{2}g_{\mu\nu}\underbrace{\delta g^{\mu\nu}}_{=0})d^{n-1}x = 0. \tag{C.14}$$

Az egyenlet jobb oldalának a részletes kidolgozását most bemutatjuk

$$\int_\nu e^{-\phi}(R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g} + R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu})d^nx + \int_\nu e^{-\phi}\delta(F\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^nx$$
$$\int_\nu e^{-\phi}[\underbrace{(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)}_{G_{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}]\sqrt{-g}d^nx + \int_\nu e^{-\phi}\delta(F\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^nx$$
$$\int_\nu e^{-\phi}(g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})\sqrt{-g}d^nx + \int_\nu e^{-\phi}F\delta(\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^nx = 0. \tag{C.15}$$

Vegyük sorba az integrálban lévő tagokat. Az első tag

$$\int_\nu e^{-\phi}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})\sqrt{-g}d^nx. \tag{C.16}$$

Felhasználva a Ricci skalár variációját (lásd B.1 függelék)

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} \tag{C.17}$$

$$= g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} \tag{C.18}$$

$$= g_{\mu\nu}g^{\sigma\gamma}\nabla_\sigma\nabla_\gamma\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\sigma\nabla_\gamma\delta g^{\sigma\gamma} \tag{C.19}$$

$$= \nabla_\sigma(g_{\mu\nu}g^{\sigma\gamma}\nabla_\gamma\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\gamma\delta g^{\sigma\gamma}). \tag{C.20}$$

Megszorozva az egyenletet a $\sqrt{-g}$-vel

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g} &= \nabla_\sigma(g_{\mu\nu}g^{\sigma\gamma}\nabla_\gamma\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\gamma\delta g^{\sigma\gamma})\sqrt{-g} \\ g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g} &= [(g_{\mu\nu}g^{\sigma\gamma}\delta g^{\mu\nu}_{;\gamma} - \delta g^{\sigma\gamma}_{;\gamma})\sqrt{-g}]_{,\sigma}, \end{aligned} \tag{C.21}$$

ahol ismét felhasználtuk, hogy $\nabla_\mu(.)\sqrt{-g} = \partial_\mu(.\sqrt{-g})$.

Tehát a (C.16) integrálba behelyettesítve

$$\begin{aligned} \int_\nu e^{-\phi}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})\sqrt{-g}d^nx &= \int_\nu e^{-\phi}[(g_{\mu\nu}g^{\sigma\gamma}\delta g^{\mu\nu}_{;\gamma} - \delta g^{\sigma\gamma}_{;\gamma})\sqrt{-g}]_{,\sigma}d^nx \\ &= \int_\nu e^{-\phi}\lambda_\sigma(g_{\mu\nu}g^{\sigma\gamma}\delta g^{\mu\nu}_{;\gamma} - \delta g^{\sigma\gamma}_{;\gamma})\sqrt{-g}d^nx, \end{aligned} \tag{C.22}$$

ahol elvégeztünk egy parciális integrálást és felhasználtuk, hogy $g^{\mu\nu}_{;\gamma}$ rögzített a peremen.

Ismét vegyük sorba a tagokat az integrálban. Az első tag az integrálban

$$\begin{aligned} &\int_\nu e^{-\phi}\lambda_\sigma g_{\mu\nu}g^{\sigma\gamma}\delta g^{\mu\nu}_{;\gamma}\sqrt{-g}d^nx = \int_\nu e^{-\phi}\lambda^\gamma g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}_{;\gamma}\sqrt{-g}d^nx \\ =&\int_\nu e^{-\phi}g_{\mu\nu}\lambda^\gamma(\delta g^{\mu\nu}_{,\gamma} + \Gamma^\nu_{\gamma\sigma}\delta g^{\mu\sigma} + \Gamma^\mu_{\gamma\sigma}\delta g^{\sigma\nu})\sqrt{-g}d^nx \\ =&\int_\nu e^{-\phi}g_{\mu\nu}\lambda^\gamma\delta g^{\mu\nu}_{,\gamma}\sqrt{-g}d^nx + I_2 \\ =&-\int_\nu \delta g^{\mu\nu}(e^{-\phi}g_{\mu\nu}\lambda^\gamma\sqrt{-g})_{,\gamma}d^nx + I_2 \\ =&-\int_\nu \delta g^{\mu\nu}(-e^{-\phi}g_{\mu\nu}\lambda^\gamma\sqrt{-g}\lambda_\gamma + e^{-\phi}\lambda^\gamma_{,\gamma}g_{\mu\nu}\sqrt{-g} + e^{-\phi}\lambda^\gamma(g_{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\gamma})d^nx + I_2 \\ =&\int_\nu d^nx\delta g^{\mu\nu}e^{-\phi}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}(\lambda^\gamma\lambda_\gamma - \lambda^\gamma_{,\gamma}) - \int_\nu d^nx\delta g^{\mu\nu}e^{-\phi}\lambda^\gamma(g_{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\gamma} + I_2 \\ =&I_1 + \int_\nu d^nxe^{-\phi}\lambda^\gamma[-\delta g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\gamma} + g_{\mu\nu}\sqrt{-g}(\Gamma^\nu_{\gamma\sigma}\delta g^{\mu\sigma} + \Gamma^\mu_{\gamma\sigma})] \\ =&I_1 + \int_\nu d^nxe^{-\phi}\lambda^\gamma[-\delta g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\gamma} + 2g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\Gamma^\mu_{\gamma\sigma}\delta g^{\nu\sigma}]. \end{aligned}$$

Felhasználjuk az alábbi azonosságokat

$$\partial_\gamma g_{\mu\nu} = 2\Gamma^\sigma_{\gamma\nu}g_{\mu\sigma}, \quad \partial_\gamma g^{\mu\nu} = -g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\partial_\gamma g_{\alpha\beta}, \quad \partial_\gamma\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\Gamma^\alpha_{\gamma\alpha}. \tag{C.23}$$

Behelyettesítve a fenti integrálba

$$\begin{aligned} &I_1 + \int_\nu d^nxe^{-\phi}\lambda^\gamma[-\delta g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu}\sqrt{-g}_{,\gamma} + \sqrt{-g}g_{\mu\nu,\gamma}) + 2g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\Gamma^\mu_{\gamma\sigma}\delta g^{\nu\sigma}] \\ =&I_1 + \int_\nu d^nxe^{-\phi}\lambda^\gamma(\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\Gamma^\alpha_{\gamma\alpha}g_{\mu\nu} - 2\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\Gamma^\sigma_{\gamma\nu}g_{\mu\sigma} + 2\delta g^{\nu\sigma}\sqrt{-g}\Gamma^\mu_{\sigma\gamma}g_{\mu\nu}) \\ =&\int_\nu d^nx\delta g^{\mu\nu}e^{-\phi}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}(\lambda^\gamma\lambda_\gamma - \lambda^\gamma_{,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\alpha}\lambda^\gamma). \end{aligned} \tag{C.24}$$

Most vegyük a (C.22) integrálból a második tagot

$$\begin{aligned}
&\int_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}\lambda_\sigma \delta g^{\sigma\gamma}_{;\gamma} d^n x = \int_\nu d^n x e^{-\phi}\sqrt{-g}\lambda_\sigma(\delta g^{\sigma\gamma}_{,\gamma} + \Gamma^\sigma_{\gamma\alpha}\delta g^{\alpha\gamma} + \Gamma^\gamma_{\gamma\alpha}\delta g^{\sigma\alpha}) \\
&= \int_\nu d^n x e^{-\phi}\sqrt{-g}\lambda_\sigma \delta g^{\sigma\gamma}_{,\gamma} + I_2 \\
&= -\int_\nu d^n x (e^{-\phi}\sqrt{-g}\lambda_\sigma)_{,\gamma}\delta g^{\sigma\gamma} + I_2 \\
&= -\int_\nu d^n x(-\lambda_\gamma e^{-\phi}\sqrt{-g}\lambda_\sigma + e^{-\phi}\sqrt{-g}\lambda_{\sigma,\gamma} + e^{-\phi}\lambda_\sigma\sqrt{-g}\Gamma^\alpha_{\gamma\alpha})\delta g^{\sigma\gamma} + I_2 \\
&= \int_\nu d^n x e^{-\phi}\sqrt{-g}(\lambda_\mu\lambda_\nu - \lambda_{\mu,\nu})\delta g^{\mu\nu} + \int_\nu d^n x e^{-\phi}\sqrt{-g}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\lambda_\sigma\delta g^{\mu\nu} \\
&= \int_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}(\lambda_\mu\lambda_\nu - \lambda_{\mu,\nu} + \lambda_\sigma\Gamma^\sigma_{\mu\nu})d^n x. \qquad \text{(C.25)}
\end{aligned}$$

Összegezve, az integrál a következő alakot ölti

$$\begin{aligned}
\int_\nu e^{-\phi} g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})\sqrt{-g} d^n x &= \int_\nu d^n x e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}[g_{\mu\nu}(\lambda^\nu\lambda_\nu - \underbrace{\lambda^\nu_{,\nu} - \Gamma^\alpha_{\gamma\alpha}\lambda^\gamma}_{\nabla_\nu\lambda^\nu}) - (\lambda_\mu\lambda_\nu - \underbrace{\lambda_{\mu,\nu} + \lambda_\sigma\Gamma^\sigma_{\mu\nu}}_{\nabla_\nu\lambda_\mu})] \\
&= \int_\nu d^n x e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}[g_{\mu\nu}(\lambda^\nu\lambda_\nu - \nabla_\nu\lambda^\nu) - \underbrace{(\lambda_\mu\lambda_\nu - \nabla_\nu\lambda_\mu)}_{\equiv -\Lambda_{\mu\nu}}] \\
&= \int_\nu d^n x e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\underbrace{(\Lambda_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda)}_{\equiv K_{\mu\nu}} \\
&= \int_\nu d^n x e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}, \qquad \text{(C.26)}
\end{aligned}$$

ahol $\Lambda_{\mu\nu} := \frac{1}{2}(\lambda_{\mu;\nu} + \lambda_{\nu;\mu}) - \lambda_\mu\lambda_\nu$, $\Lambda = \Lambda^\mu_\mu$ és $K_{\mu\nu} := \Lambda_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda$.

Utolsó lépésként helyettesítsünk be eredményünket a (C.15) integrálba

$$\begin{aligned}
&\int_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}(K_{\mu\nu} + G_{\mu\nu})d^n x + \int_\nu e^{-\phi} F\delta(\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^n x \\
&= \int_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}(K_{\mu\nu} + G_{\mu\nu} - \frac{F}{2}T_{\mu\nu})d^n x = 0,
\end{aligned}$$

ahol $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}}$. Megkaptuk tehát a keresett összefüggésünket.

C.3. Herglotz variációs elv $f(R)$ gravitációban

Vezessük le a variált hatásintegrálunk végső alakját. Induljunk ki a (3.32) integrálból.

$$\begin{aligned}
&\int_{\nu} e^{-\phi}\delta(f(R)\sqrt{-g}+F\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^n x\\
&=\int_{\nu} e^{-\phi}(\sqrt{-g}\delta f(R)+f(R)\delta\sqrt{-g})d^n x+\int_{\nu} e^{-\phi}F\delta(\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^n x\\
&=\int_{\nu} e^{-\phi}\sqrt{-g}[f'(R)\delta R-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R)]d^n x+\int_{\nu} e^{-\phi}F\delta(\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^n x=0.
\end{aligned} \tag{C.27}$$

Vegyük az első tagot az integrálból

$$\int_{\nu} e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)\delta R d^n x. \tag{C.28}$$

Felhasználva a Ricci skalár variációját (lásd B.1 függelék)

$$f'(R)\delta R=R_{\mu\nu}f'(R)\delta g^{\mu\nu}+f'(R)g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu}-f'(R)\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}. \tag{C.29}$$

Hogy kezelhessük a variált metrikus tenzor deriváltakat, felhasználjuk korábbi eredményeinket (lásd B.1 függelék)

$$f^{'}(R)g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu}=\nabla_\alpha(f^{'}(R)g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu})-\nabla^\alpha(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha f^{'}(R))+\delta g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\alpha f^{'}(R)) \tag{C.30}$$

$$f^{'}(R)\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}=\nabla_\mu(f^{'}(R)\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu})-\nabla_\nu(\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu f^{'}(R))+\delta g^{\mu\nu}(\nabla_\nu\nabla_\mu f^{'}(R)). \tag{C.31}$$

Behelyettesítve a (C.29) kifejezésbe

$$\begin{aligned}
f'(R)\delta R=&R_{\mu\nu}f'(R)\delta g^{\mu\nu}+\nabla_\alpha(f^{'}(R)g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu})-\nabla^\alpha(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha f^{'}(R))+\delta g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\alpha f^{'}(R))+\\
&+\nabla_\mu(f^{'}(R)\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu})-\nabla_\nu(\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu f^{'}(R))+\delta g^{\mu\nu}(\nabla_\nu\nabla_\mu f^{'}(R)).
\end{aligned} \tag{C.32}$$

A (C.28) integrálunk tehát átírható, mint

$$\begin{aligned}
&\int_{\nu} e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)\delta R d^n x=\int_{\nu} e^{-\phi}\sqrt{-g}[R_{\mu\nu}f'(R)+(g_{\mu\nu}\Box-\nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R)]\delta g^{\mu\nu}d^n x+\\
&+\int_{\nu} e^{-\phi}[\sqrt{-g}(f'(R)g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu})]_{,\alpha}d^n x-\int_{\nu} e^{-\phi}[\sqrt{-g}(g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha f'(R))]_{,\beta}d^n x-\\
&-\int_{\nu} e^{-\phi}[\sqrt{-g}(f'(R)\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu})]_{,\mu}d^n x+\int_{\nu} e^{-\phi}[\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu f'(R))]_{\nu}d^n x.
\end{aligned} \tag{C.33}$$

Ismét dolgozzunk külön a tagokkal. Vegyük az egyenlet jobb oldaláról a második tagot

$$\int_\nu e^{-\phi}[\sqrt{-g}(f'(R)g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu})]_{,\alpha}d^nx = \int_\nu \lambda_\alpha e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu}d^nx$$
$$= \int_\nu \lambda_\alpha e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu}d^nx = \int_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)g_{\mu\nu}\lambda^\beta\delta g^{\mu\nu}_{;\beta}d^nx$$
$$= \int_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)g_{\mu\nu}\lambda^\beta(\delta g^{\mu\nu}_{,\beta} + \Gamma^\mu_{\beta\omega}\delta g^{\omega\nu} + \Gamma^\nu_{\beta\omega}\delta g^{\mu\omega})d^nx$$
$$= \int_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)g_{\mu\nu}\lambda^\beta(\delta g^{\mu\nu}_{,\beta} + 2\Gamma^\mu_{\beta\omega}\delta g^{\omega\nu})d^nx = \int_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)g_{\mu\nu}\lambda^\beta\delta g^{\mu\nu}_{,\beta}d^nx + I_2$$
$$= -\int_\nu \delta g^{\mu\nu}(e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)g_{\mu\nu}\lambda^\beta)_{,\beta}d^nx + I_2$$
$$= -\int_\nu \delta g^{\mu\nu}(-\lambda_\beta e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)g_{\mu\nu}\lambda^\beta + e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)_{,\beta}g_{\mu\nu}\lambda^\beta + e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)g_{\mu\nu}\lambda^\beta_{,\beta}+$$
$$+ e^{-\phi}f'(R)g_{\mu\nu}\lambda^\beta\sqrt{-g}\Gamma^\theta_{\beta\theta} + 2e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)\lambda^\beta\Gamma^\chi_{\beta\chi}g_{\mu\chi})d^nx + I_2.$$

Néhány egyszerűsítés után megkapjuk, hogy

$$\int_\nu e^{-\phi}[\sqrt{-g}(f'(R)g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu})]_{,\alpha}d^nx = \int_\nu \delta g^{\mu\nu}e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)g_{\mu\nu}(\lambda_\beta\lambda^\beta - \lambda^\beta_{,\beta} - \Gamma^\theta_{\beta\theta}\lambda^\beta)d^nx$$
$$- \int_\nu \delta g^{\mu\nu}e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)_{,\beta}g_{\mu\nu}\lambda^\beta d^nx. \tag{C.34}$$

Folytatva a harmadik taggal a (C.33) integrál jobb oldaláról

$$\int_\nu e^{-\phi}[\sqrt{-g}(g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha f'(R))]_{,\beta}d^nx$$
$$= \int_\nu \lambda_\beta e^{-\phi}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\beta f'(R)d^nx. \tag{C.35}$$

A negyedik tag a (C.33) integrálból

$$\int_\nu e^{-\phi}[\sqrt{-g}(f'(R)\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu})]_{,\mu}d^nx = \int_\nu \lambda_\mu e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}d^nx$$
$$= \int_\nu \lambda_\mu e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)(\delta g^{\mu\nu}_{,\nu} + \Gamma^\nu_{\nu\sigma}\delta g^{\mu\sigma} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\delta g^{\sigma\nu})d^nx = \int_\nu \lambda_\mu e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)\delta g^{\mu\nu}_{,\nu}d^nx + I_2$$
$$= -\int_\nu \delta g^{\mu\nu}(\lambda_\mu e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R))_{,\nu}d^nx + I_2 = -\int_\nu \delta g^{\mu\nu}(\lambda_{\mu,\nu}e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R) - \lambda_\mu\lambda_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)+$$
$$+ \lambda_\mu e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)_{,\nu} + \lambda_\mu e^{-\phi}f'(R)\sqrt{-g}\Gamma^\alpha_{\nu\alpha})d^nx + I_2 = \int_\nu \delta g^{\mu\nu}e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)(\lambda_\mu\lambda_\nu - \lambda_{\mu,\nu} + \lambda_\omega\Gamma^\omega_{\nu\mu})d^nx-$$
$$- \int_\nu \delta g^{\mu\nu}\lambda_\mu e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)_{,\nu}d^nx. \tag{C.36}$$

Az utolsó tag pedig a (C.33) integrálból

$$\int_\nu e^{-\phi}[\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu f'(R))]_{\nu}d^nx = \int_\nu \lambda_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}f'(R)_{,\mu}d^nx. \tag{C.37}$$

Eredményeinket behelyettesítve a (C.33) integrálba

$$\int_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)\delta R d^n x = I + \int_\nu \delta g^{\mu\nu} e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)g_{\mu\nu}(\lambda_\beta\lambda^\beta - \lambda^\beta_{,\beta} - \Gamma^\theta_{\beta\theta}\lambda^\beta)d^n x$$
$$- \int_\nu \delta g^{\mu\nu} e^{-\phi}\sqrt{-g}\partial^\beta f'(R)g_{\mu\nu}\lambda_\beta d^n x - \int_\nu \lambda_\beta e^{-\phi}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\partial^\beta f'(R)d^n x -$$
$$- \int_\nu \delta g^{\mu\nu} e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)(\lambda_\mu\lambda_\nu - \lambda_{\mu,\nu} + \lambda_\omega\Gamma^\omega_{\nu\mu})d^n x + \int_\nu \delta g^{\mu\nu}\lambda_\mu e^{-\phi}\sqrt{-g}\partial_\nu f'(R)d^n x +$$
$$+ \int_\nu \lambda_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu f'(R)d^n x = I + \int_\nu \delta g^{\mu\nu} e^{-\phi}\sqrt{-g}f'(R)[g_{\mu\nu}(\lambda_\beta\lambda^\beta - \lambda^\beta_{,\beta} - \Gamma^\theta_{\beta\theta}\lambda^\beta) -$$
$$- (\lambda_\mu\lambda_\nu - \lambda_{\mu,\nu} + \lambda_\omega\Gamma^\omega_{\mu\nu})]d^n x - 2\int_\nu \delta g^{\mu\nu} e^{-\phi}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\lambda_\beta\partial^\beta f'(R)d^n x +$$
$$\int_\nu \delta g^{\mu\nu} e^{-\phi}\sqrt{-g}(\lambda_\mu\partial_\nu(f'(R)) + \lambda_\nu\partial_\mu(f'(R)))d^n x = \int_\nu d^n x e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}[R_{\mu\nu}f'(R) +$$
$$+ (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) + f'(R)K_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}\lambda_\beta\partial^\beta(f'(R)) + \lambda_\mu\partial_\nu(f'(R)) + \lambda_\nu\partial_\mu(f'(R))]. \tag{C.38}$$

Végül, megkapjuk, hogy (C.27) integrálunk

$$\int_\nu d^n x e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}[R_{\mu\nu}f'(R) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) + f'(R)K_{\mu\nu} -$$
$$- 2g_{\mu\nu}\lambda_\beta\partial^\beta(f'(R)) + \lambda_\mu\partial_\nu(f'(R)) + \lambda_\nu\partial_\mu(f'(R)) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) - \frac{F}{2}T_{\mu\nu}]d^n x = 0, \tag{C.39}$$

mely a bizonyítandó integrálunk volt.

C.4. Herglotz variációs elv $f(R,T)$ gravitációban

Vezessük le a variált hatásintegrálunk végső alakját. Induljunk ki a (3.37) egyenletből és használjuk fel korábbi eredményeinket

$$\int_\nu e^{-\phi}\delta(f(R,T)\sqrt{-g} + F\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^n x$$
$$= \int_\nu e^{-\phi}(\sqrt{-g}\delta f(R,T) + f(R,T)\delta\sqrt{-g})d^n x + \int_\nu e^{-\phi}F\delta(\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^n x$$
$$= \int_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}[f_R(R,T)\delta R + f_T(R,T)\delta T - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R,T)]d^n x + \int_\nu e^{-\phi}F\delta(\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^n x$$
$$= \int_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}[f_R(R,T)\delta R + f_T(R,T)\frac{\partial(g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R,T)]d^n x + \int_\nu e^{-\phi}F\delta(\mathcal{L}_m\sqrt{-g})d^n x$$
$$=0. \tag{C.40}$$

$$\rightarrow \frac{\partial(g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} = T_{\alpha\beta}\frac{\partial(g^{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} + \underbrace{g_{\alpha\beta}\frac{\partial(T_{\alpha\beta})}{\partial g\mu\nu}}_{\equiv\Theta_{\mu\nu}} = T_{\alpha\beta}\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu + \Theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}. \tag{C.41}$$

Felhasználva a C.3-ban kapott végső eredményt, a következő integrált kapjuk

$$\int_\nu e^{-\phi}\sqrt{-g}f_R(R,T)\delta R d^n x = \int_\nu d^n x e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}[R_{\mu\nu}f_R(R,T)+ \\ + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R,T) + f_R(R,T)K_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}\lambda_\beta\partial^\beta(f_R(R,T)) + \lambda_\mu\partial_\nu(f_R(R,T)) + \lambda_\nu\partial_\mu(f_R(R,T))]. \tag{C.42}$$

Behelyettesítve a fenti összefüggésbe

$$\int_\nu d^n x e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}[R_{\mu\nu}f_R(R,T) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R,T) + f_R(R,T)K_{\mu\nu} - \\ - 2g_{\mu\nu}\lambda_\beta\partial^\beta(f_R(R,T)) + \lambda_\mu\partial_\nu(f_R(R,T)) + \lambda_\nu\partial_\mu(f_R(R,T)) + T_{\mu\nu}f_T(R,T) + \Theta_{\mu\nu}f_T(R,T) - \\ - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R,T) - \frac{F}{2}T_{\mu\nu}] = 0. \tag{C.43}$$

Továbbiakban vezessük le az energia-momentum tenzor divergenciáját. Induljunk ki a (3.39) téregyenletekre vett divergenciából

$$\nabla^\mu\left[f_R(R,T)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R,T) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R,T) + H_{\mu\nu}\right] = \nabla^\mu\left[\frac{F}{2}T_{\mu\nu} - \\ - T_{\mu\nu}f_T(R,T) - \Theta_{\mu\nu}f_T(R,T)\right]. \tag{C.44}$$

Vizsgáljuk meg először az egyenlet bal oldalát

$$\begin{aligned}
&\nabla^\mu\left[f_R(R,T)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R,T) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R,T) + H_{\mu\nu}\right] \\
=&f_R(R,T)\nabla^\mu R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,T) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\mu f(R,T) + g_{\mu\nu}\nabla^\mu\Box f_R(R,T) - \\
&- \nabla^\mu\nabla_\mu\nabla_\nu f_R(R,T) + \nabla^\mu H_{\mu\nu} \\
=&f_R(R,T)\nabla^\mu R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,T) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_R(R,T)\nabla^\mu R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_T(R,T)\nabla^\mu T + \\
&+ \nabla_\nu\Box f_R(R,T) - \Box\nabla_\nu f_R(R,T) + \nabla^\mu H_{\mu\nu} \\
=&f_R(R,T)\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,T) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_T(R,T)\nabla^\mu T + \\
&+ (\nabla_\nu\Box - \Box\nabla_\nu)f_R(R,T) + \nabla^\mu H_{\mu\nu} \\
=&f_R(R,T)\nabla^\mu G_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,T) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_T(R,T)\nabla^\mu T - R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,T) + \nabla^\mu H_{\mu\nu} \\
=& - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_T(R,T)\nabla^\mu T + \nabla^\mu H_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{C.45}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ és $\nabla_\nu\Box - \Box\nabla_\nu = -R_{\mu\nu}\nabla^\mu$.

Az (C.44) egyenlet jobb oldala pedig a következőképpen alakul

$$\begin{aligned}
&\nabla^{\mu}\left[\frac{F}{2}T_{\mu\nu}-T_{\mu\nu}f_T(R,T)-\Theta_{\mu\nu}f_T(R,T)\right]\\
=&\frac{F}{2}\nabla^{\mu}T_{\mu\nu}+\frac{T_{\mu\nu}}{2}\nabla^{\mu}F-T_{\mu\nu}\nabla^{\mu}f_T(R,T)-f_T(R,T)\nabla^{\mu}T_{\mu\nu}-\Theta_{\mu\nu}\nabla^{\mu}f_T(R,T)-f_T(R,T)\nabla^{\mu}\Theta_{\mu\nu}\\
=&(\nabla^{\mu}T_{\mu\nu})\left(\frac{F}{2}-f_T(R,T)\right)+\frac{T_{\mu\nu}}{2}\nabla^{\mu}F-T_{\mu\nu}\nabla^{\mu}f_T(R,T)-\Theta_{\mu\nu}\nabla^{\mu}f_T(R,T)-f_T(R,T)\nabla^{\mu}\Theta_{\mu\nu}\\
=&(\nabla^{\mu}T_{\mu\nu})\left(\frac{F}{2}-f_T(R,T)\right)+\frac{T_{\mu\nu}}{2}\nabla^{\mu}F-T_{\mu\nu}\nabla^{\mu}f_T(R,T)-\Theta_{\mu\nu}\nabla^{\mu}f_T(R,T)-\\
&-f_T(R,T)\nabla^{\mu}\left(-2T_{\mu\nu}+g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m-2g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}\right)\\
=&(\nabla^{\mu}T_{\mu\nu})\left(\frac{F}{2}+f_T(R,T)\right)+\frac{T_{\mu\nu}}{2}\nabla^{\mu}F-(T_{\mu\nu}+\Theta_{\mu\nu})\nabla^{\mu}f_T(R,T)-f_T(R,T)\nabla_{\nu}\mathcal{L}_m+\\
&+2g^{\alpha\beta}f_T(R,T)\nabla^{\mu}\frac{\partial^2\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}},
\end{aligned}\tag{C.46}$$

ahol felhasználtuk a $\Theta_{\mu\nu}=-2T_{\mu\nu}+g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m-2g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}$ azonosságot.

Behelyettesítva eredményeink a (C.44) egyenletbe

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_T(R,T)\nabla^{\mu}T+\nabla^{\mu}H_{\mu\nu}=(\nabla^{\mu}T_{\mu\nu})\left(\frac{F}{2}+f_T(R,T)\right)+\frac{T_{\mu\nu}}{2}\nabla^{\mu}F-\\
&-(T_{\mu\nu}+\Theta_{\mu\nu})\nabla^{\mu}f_T(R,T)-f_T(R,T)\nabla_{\nu}\mathcal{L}_m+2g^{\alpha\beta}f_T(R,T)\nabla^{\mu}\frac{\partial^2\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}.
\end{aligned}\tag{C.47}$$

Utolsó lépésként pedig fejezzük ki az energia-momentum tenzor divergenciáját

$$\begin{aligned}
\nabla^{\mu}T_{\mu\nu}=&\frac{1}{\frac{F}{2}+f_T(R,T)}\left[\nabla^{\mu}H_{\mu\nu}-\frac{1}{2}f_T(R,T)\nabla_{\nu}T-\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\nabla^{\mu}F+(T_{\mu\nu}+\Theta_{\mu\nu})\nabla^{\mu}f_T(R,T)+\right.\\
&\left.+f_T(R,T)\nabla_{\nu}\mathcal{L}_m-2g^{\alpha\beta}f_T(R,T)\nabla^{\mu}\frac{\partial^2\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}\right].
\end{aligned}\tag{C.48}$$

C.5. Herglotz variációs elv $f(R,\mathcal{L}_m)$ gravitációban

Kezdjük a (3.46) kifejezés bizonyításával. Induljunk ki a (3.45) egyenletből és használjuk fel korábbi eredményeinket

$$\begin{aligned}
&\int_{\nu}e^{-\phi}\delta(f(R,\mathcal{L}_m)\sqrt{-g})d^nx\\
=&\int_{\nu}e^{-\phi}\left[f(R,\mathcal{L}_m)\delta\sqrt{-g}+\sqrt{-g}\delta f(R,\mathcal{L}_m)\right]d^nx\\
=&\int_{\nu}e^{-\phi}\sqrt{-g}\left[f_R(R,\mathcal{L}_m)\delta R+f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\delta\mathcal{L}_m-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R,\mathcal{L}_m)\delta g^{\mu\nu}\right]\\
=&\int_{\nu}e^{-\phi}\sqrt{-g}\left[f_R(R,\mathcal{L}_m)\delta R+f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R,\mathcal{L}_m)\delta g^{\mu\nu}\right].
\end{aligned}\tag{C.49}$$

Felhasználva a $\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - \frac{1}{2}T_{\mu\nu}$ összefüggést (lásd B.3 függelék) és a (C.38) integrált (lásd C.3 függelék), megkapjuk a variált hatásra vonatkozó végleges képletet

$$\begin{aligned}
&\int_\nu d^n x e^{-\phi}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}[R_{\mu\nu} f_R(R,\mathcal{L}_m) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu) f_R(R,\mathcal{L}_m) + f_R(R,\mathcal{L}_m)K_{\mu\nu} - \\
&- 2g_{\mu\nu}\lambda_\beta\partial^\beta(f_R(R,\mathcal{L}_m)) + \lambda_\mu\partial_\nu(f_R(R,\mathcal{L}_m)) + \lambda_\nu\partial_\mu(f_R(R,\mathcal{L}_m)) + \frac{1}{2} f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - \\
&- \frac{1}{2} f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R,\mathcal{L}_m)] = 0. \qquad \text{(C.50)}
\end{aligned}$$

Végül vezessük le az energia-momentum tenzor divergenciáját.Induljunk ki a (3.47) téregyenletből és vegyük a divergenciáját

$$\begin{aligned}
&\nabla^\mu\left[f_R(R,\mathcal{L}_m)R_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu) f_R(R,\mathcal{L}_m) - \frac{1}{2}(f(R,\mathcal{L}_m) - \right.\\
&\left. - f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\mathcal{L}_m) g_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}\right] = \nabla^\mu\left[\frac{1}{2} f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)T_{\mu\nu}\right]. \qquad \text{(C.51)}
\end{aligned}$$

Kezdjük a bal oldal vizsgálatával

$$\begin{aligned}
& f_R(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,\mathcal{L}_m) + (\nabla^\mu g_{\mu\nu}\Box - \nabla^\mu\nabla_\mu\nabla_\nu) f_R(R,\mathcal{L}_m) - \\
&- \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\nabla^\mu f(R,\mathcal{L}_m) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu\mathcal{L}_m + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) + \nabla^\mu H_{\mu\nu} \\
=& f_R(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,\mathcal{L}_m) + (\nabla_\nu\Box - \Box\nabla_\nu) f_R(R,\mathcal{L}_m) - \\
&- \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f_R(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu\mathcal{L}_m + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu\mathcal{L}_m + \\
&+ \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) + \nabla^\mu H_{\mu\nu} \\
=& f_R(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R\right) + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,\mathcal{L}_m) - R_{\mu\nu}\nabla^\mu f_R(R,\mathcal{L}_m) + \\
&+ \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) + \nabla^\mu H_{\mu\nu} \\
=& f_R(R,\mathcal{L}_m)\underbrace{\nabla^\mu(G_{\mu\nu})}_{=0} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) + \nabla^\mu H_{\mu\nu} \\
=& \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m) + \nabla^\mu H_{\mu\nu}, \qquad \text{(C.52)}
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ és $\nabla_\nu\Box - \Box\nabla_\nu = -R_{\mu\nu}\nabla^\mu$.

A (C.51) egyenlet jobb oldala a következőképpen alakul

$$\nabla^\mu\left[\frac{1}{2} f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)T_{\mu\nu}\right] = \frac{1}{2} f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}T_{\mu\nu}\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m). \qquad \text{(C.53)}$$

Behelyettesítve eredményeinket a (C.51) egyenletbe

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)+\nabla^\mu H_{\mu\nu}=\frac{1}{2}f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu T_{\mu\nu}+\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\\
&\frac{1}{2}f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)\nabla^\mu T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m-T_{\mu\nu})\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)+\nabla^\mu H_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{C.54}$$

Kifejezve az energia-momentum divergenciáját

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}=\frac{2}{f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)}\left[\frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m-T_{\mu\nu})\nabla^\mu f_{\mathcal{L}_m}(R,\mathcal{L}_m)+\nabla^\mu H_{\mu\nu}\right]. \tag{C.55}$$

Irodalom

[1] Tomi Koivisto. "Covariant conservation of energy momentum in modified gravities". *Class. Quant. Grav.* 23 (2006), 4289–4296. old. DOI: 10.1088/0264-9381/23/12/N01. arXiv: gr-qc/0505128.

[2] Miguel A. S. Pinto, Tiberiu Harko és Francisco S. N. Lobo. "Irreversible Geometrothermodynamics of Open Systems in Modified Gravity". *Entropy* 25.6 (2023), 944. old. DOI: 10.3390/e25060944. arXiv: 2306.13912.

[3] Juilson A. P. Paiva, Matheus J. Lazo és Vilson T. Zanchin. "Generalized nonconservative gravitational field equations from Herglotz action principle". *Phys. Rev. D* 105.12 (2022), 124023. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.105.124023. arXiv: 2108.02902 [gr-qc].

[4] Matheus J. Lazo és tsai. "Action principle for action-dependent Lagrangians toward nonconservative gravity: Accelerating universe without dark energy". *Phys. Rev. D* 95.10 (2017), 101501. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.101501. arXiv: 1705.04604 [gr-qc].

[5] Albert Einstein. "Die feldgleichungen der gravitation". *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften* (1915), 844–847. old.

[6] D. Hilbert. "Die Grundlagen der Physik . (Erste Mitteilung.)" *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1915 (1915), 395–408. old. URL: http://eudml.org/doc/58946.

[7] A. Einstein. "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie". (1923), 81–124. old. DOI: 10.1007/978-3-663-19510-8_7.

[8] Clifford M. Will. "The Confrontation between General Relativity and Experiment". *Living Rev. Rel.* 17 (2014), 4. old. DOI: 10.12942/lrr-2014-4. arXiv: 1403.7377 [gr-qc].

[9] B. P. Abbott és tsai. "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger". *Phys. Rev. Lett.* 116 (6 2016. febr.), 61102. old. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102.

[10] Hermano Velten és Thiago R. P. Caramês. "To Conserve, or Not to Conserve: A Review of Nonconservative Theories of Gravity". *Universe* 7.2 (2021). ISSN: 2218-1997. DOI: 10.3390/universe7020038. URL: https://www.mdpi.com/2218-1997/7/2/38.

[11] Hermano Velten és Thiago R. P. Caramês. "Cosmological inviability of $f(R,T)$ gravity". *Phys. Rev. D* 95 (12 2017. jún.), 123536. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.123536.

[12] Júlio C. Fabris és tsai. "Rastall's cosmology and its observational constraints". *AIP Conference Proceedings* 1647 (2015), 50–53. old. DOI: 10.1063/1.4913336.

[13] László B. Szabados. "Quasi-Local Energy-Momentum and Angular Momentum in General Relativity". *Living Reviews in Relativity* 12 (2009), 4. old. DOI: 10.12942/lrr-2009-4.

[14] L. D. Landau és E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. 4th. 2. köt. Course of Theoretical Physics. Pergamon Press, 1975.

[15] Tiberiu Harko és Shahab Shahidi. "Cosmological implications of the Weyl geometric gravity theory". *arXiv preprint* (2024). arXiv:2405.04129. DOI: 10.1140/epjc/s10052-024-12861-z. arXiv: 2405.04129 [gr-qc].

[16] Piyabut Burikham és tsai. "Dark matter as a Weyl geometric effect". *Phys. Rev. D* 107 (6 2023. márc.), 64008. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.107.064008.

[17] J. David Brown. "Action functionals for relativistic perfect fluids". *Classical and Quantum Gravity* 10.8 (1993), 1579–1606. old. DOI: 10.1088/0264-9381/10/8/017. URL: https://doi.org/10.1088/0264-9381/10/8/017.

[18] Tiberiu Harko és Francisco S. N. Lobo. *Extensions of F(R) Gravity: Curvature-Matter Couplings and Hybrid Metric-Palatini Theory*. Cambridge University Press, 2018. ISBN: 9781108645683. DOI: 10.1017/9781108645683.

[19] Tiberiu Harko és tsai. "f(R,T) gravity". *Physical Review D* 84.2 (2011), 24020. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.024020. arXiv: 1104.2669.

[20] Tiberiu Harko és Francisco S. N. Lobo. "f(R, L_m) gravity". *arXiv preprint* (2010). DOI: 10.1140/epjc/s10052-010-1467-3. arXiv: 1008.4193.

[21] Tiberiu Harko és Francisco S. N. Lobo. "Generalized Curvature-Matter Couplings in Modified Gravity". *Galaxies* 2.3 (2014), 410–465. old. DOI: 10.3390/galaxies2030410.

[22] I. Gyarmati. *Non-equilibrium Thermodynamics: Field Theory and Variational Principles*. Berlin: Springer, 1970.

[23] Anton Almén. *Helmholtz conditions and the inverse problem for Lagrangian mechanics*. Bachelor Thesis, Karlstad University. 2020.

[24] Ioan Bucataru és Oana Constantinescu. "Helmholtz conditions and symmetries for the time dependent case of the inverse problem of the calculus of variations". *Journal of Geometry and Physics* 60.11 (2010), 1710–1725. old. ISSN: 0393-0440. DOI: https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2010.06.016.

[25] Kushagra Nigam és Kinjal Banerjee. "A Brief Review of Helmholtz Conditions". (2016. febr.). DOI: 10.48550/arXiv.1602.01563.

[26] P. Ván és B. Nyíri. "Hamilton formalism and variational principle construction". *Annalen der Physik* 8.4 (1999), 331–354. old. DOI: 10.1002/andp.19995110404.

[27] Matheus J. Lazo és tsai. "An Action Principle for Action-dependent Lagrangians: toward an Action Principle to non-conservative systems". *arXiv preprint* (2018). arXiv: 1803.08308 [math-ph].

[28] Jordi Gaset és Adrià Marín-Salvador. "Application of Herglotz's variational principle to electromagnetic systems with dissipation". *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 19.10 (2022), 2250156. old. DOI: 10.1142/S0219887822501560.

[29] Lehel Csillag és tsai. "Herglotz type $f(R,T)$ gravity". Unpublished manuscript. 2025.

[30] F. Marquardt és A. Püttmann. *Introduction to dissipation and decoherence in quantum systems*. 2008. arXiv: 0809.4403 [quant-ph].

[31] F.M. Ciaglia, H. Cruz és G. Marmo. *Contact manifolds and dissipation, classical and quantum*. 2018. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aop.2018.09.012.

Anexa 2

DECLARAȚIE PE PROPRIE RĂSPUNDERE

Subsemnatul, Szőllősi Tamás-Géza, declar că Lucrarea de licență/diplomă/disertație pe care o voi prezenta în cadrul examenului de finalizare a studiilor la Facultatea de Fizică, din cadrul Universității Babeș-Bolyai, în sesiunea iulie 2025 , sub îndrumarea Dr. Lázár Zsolt József, reprezintă o operă personală. Menționez că nu am plagiat o altă lucrare publicată, prezentată public sau un fișier postat pe Internet. Pentru realizarea lucrării am folosit exclusiv bibliografia prezentată și nu am ascuns nici o altă sursă bibliografică sau fișier electronic pe care să le fi folosit la redactarea lucrării.

Prezenta declarație este parte a lucrării și se anexează la aceasta.

Data,
22.06.2025

Nume,
Szőllősi Tamás-Géza

Semnătură